

Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów – 25
28.5.2009

1. Proszę przeczytać rozdziały 10-1, 10-2 z podręcznika Feynmana i Hibbsa.
2. Funkcja rozdziału \mathcal{Z} zdefiniowana jest jako:

$$\mathcal{Z} = \int dx \rho(x, x, \beta),$$

gdzie macierz gęstości jest euklidesową formą propagatora K :

$$\rho(x_2, x_1, \beta) = K(x_2, x_1, -i\hbar\beta).$$

Wyliczyć funkcję rozdziału dla cząstki swobodnej i dla oscylatora harmonicznego.

3. Przy pomocy macierzy gęstości dla oscylatora harmonicznego wyliczyć średnie x^2 , a także średnią energię całkowitą i średnią energię kinetyczną.
4. Dla oscylatora wymuszonego siłą $\gamma(\tau)$ wyliczyć ślad macierzy gęstości. Wygodnie jest przyjąć $\hbar = \omega = m = 1$. W tych oznaczeniach należy wykazać:

$$\text{Tr}\rho(\beta) = \sqrt{\frac{1}{2(\cosh \beta - 1)}} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\sigma \frac{\gamma(\tau)\gamma(\sigma)}{1 - e^{-\beta}} [e^{-|\tau-\sigma|} + e^{|\tau-\sigma|-\beta}] \right).$$

Jest to forma dogodna do wzięcia granicy $\beta \rightarrow \infty$. Pokazać, że jest ona równoważna:

$$\text{Tr}\rho(\beta) = \sqrt{\frac{1}{2(\cosh \beta - 1)}} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\sigma \gamma(\tau)\gamma(\sigma) \frac{\cosh(|\tau - \sigma| - \frac{\beta}{2})}{\sinh \frac{\beta}{2}} \right).$$

W celu wyprowadzenia powyższych wzorów, skorzystać ze znanego wzoru na $K(x, x', T)$ dla oscylatora wymuszonego i zamienić w nim czas Minkowskiego $t \rightarrow -i\tau$. Następnie wykonać całkę po dx położywszy $x = x'$.