Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 23 zestaw

14.05.2009. czwartek godz. 15:00, sala 057

1. Posługując się wzorem na $f^{(1)}(\theta)$ dla przybliżenia Borna dla potencjału Yukawy:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}$$

i zakładając, że przesunięcia fazowe $|\delta_l| \ll 1$, wyprowadzić wzór na δ_l wyrażony poprzez funkcje Legendre'a $Q_l(\zeta)$ zdefiniowane jako

$$Q_l(\zeta) = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} d\zeta' \frac{P_l(\zeta')}{\zeta - \zeta'}.$$

Wykazać, że Q_l są rozwiązaniami r. Legendre'a. Używając rozwinięcia dla $|\zeta| > 1$

$$\begin{aligned} Q_l(\zeta) \quad &= \quad \frac{l!}{1 \cdot 3 \ldots (2l+1)} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\zeta^{l+1}} + \frac{(l+1)(l+2)}{2 \cdot (2l+3)} \frac{1}{\zeta^{l+3}} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2l+3)(2l+5)} \frac{1}{\zeta^{l+5}} + \ldots \right\} \end{aligned}$$

udowodnić, że

   (a) δ_l jest ujemne (dodatnie) gdy potencjał jest przyciągający (odpychający), t.j. $V_0 < 0$ $(V_0 > 0)$;

   (b) dla fali de Broglie'a znacznie „dłuższej" niż zasięg potencjału

   $$\delta_l = \text{const} \times k^{2l+1}.$$

   (c) Znaleźć wzór na współczynnik proporcjonalności const.

2. Udowodnić wzór

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{m^2}{\pi \hbar^4} \iint d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,' V(r) V(r') \frac{\sin^2 k\, |\vec{r} - \vec{r}\,'|}{k^2 \, |\vec{r} - \vec{r}\,'|^2}.$$

Zadanie rozwiązać na dwa sposoby:

   (a) całkując różniczkowy przekrój czynny wyliczony w pierwszym przybliżeniu Borna,

   (b) przy pomocy twierdzenia optycznego dla amplitudy rozpraszania do przodu wyliczonej w *drugim* rzędzie (amplituda $f(0)$ w pierwszym rzędzie jest rzeczywista).

3. Rozdział 8-4 z podręcznika Feynmana i Hibbsa. Zapisać funkcję Langrange'a periodycznego układu N kulek połączonych sprężynami:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j^2 - \frac{\nu^2}{2}\left\{\sum_{j=1}^{N-1} \left(q_{j+1} - q_j\right)^2 + \left(q_1 - q_N\right)^2\right\},$$

przy pomocy rzeczywistych współrzędnych normalnych. Przyjąć, że N jest nieparzyste.

4. Znaleźć funkcję falową Φ_0 stanu podstawowego dla systemu kulek z poprzedniego zadania. Wyliczyć wartości oczekiwane w tym stanie następujących operatorów:

$$Q_\alpha, \quad Q_\alpha^\star, \quad Q_\alpha^2, \quad Q_\alpha^{\star\,2}, \; Q_\alpha^\star Q_\alpha$$

gdzie $Q_\alpha, \quad Q_\alpha^\star$ są zespolonymi współrzędnymi normalnymi.

5. Zbadać granicę ciągłą układu z poprzednich zadań (rosdz. 8-5 z podręcznika Feynmana i Hibbsa). Pokazać, że redukuje się on do teorii pola skalarnego.