Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 22 zestaw

30.4.2009. czwartek godz. 15:00, sala 057

1. Dla jamy potencjału z poprzedniego zestawu

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a < r \\ -V_0 & \text{dla} \quad r < a \end{cases}$$

pokazaliśmy, że

$$\tan \delta_l = \frac{kR\, j_l'(kR) - \beta_l\, j_l(kr)}{kR\, y_l'(kR) - \beta_l\, y_l(kr)}.$$

Wyprowadzić analogiczne równanie bezpośrednio na f_l. (Uwaga: otrzymuje się zależność od sferycznej funkcji Hankla: $h_l^{(\pm)} = j_l \pm i y_l$).

   (a) Pokazać, że

$$\begin{aligned} f_l(k) &\sim a_l k^{2l} \text{ dla } k \to 0, \\ f_l(k) &\to 0 \qquad \text{dla } k \to \infty. \end{aligned}$$

   (b) Rozważyć przypadek z $l = 0$. Pokazać, że istnieją szczególne wartości V_0, dla których $f_0(0)$ jest nieskończone, i że te szczególne wartości V_0 odpowiadają głębokości jamy, przy której pojawia się nowy stan związany.

2. Udowodnić wzór

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{m^2}{\pi \hbar^4} \iint d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}' V(r) V(r') \frac{\sin^2 k\, |\vec{r} - \vec{r}'|}{k^2\, |\vec{r} - \vec{r}'|^2}.$$

Zadanie rozwiązać na dwa sposoby:

   (a) całkując różniczkowy przekrój czynny wyliczony w pierwszym przybliżeniu Borna,

   (b) przy pomocy twierdzenia optycznego dla amplitudy rozpraszania do przodu wyliczonej w *drugim* rzędzie (amplituda $f(0)$ w pierwszym rzędzie jest rzeczywista).

3. Rozważyć rozpraszanie na potencjale Yukawy:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r},$$

gdzie $1/\mu$ jest zasięgiem oddziaływania. Wyliczyć amplitudę rozpraszania w pierwszym przybliżeniu Borna $f^{(1)}(\theta)$, gdzie θ jest kątem rozproszenia. Wyliczyć różniczkowy przekrój czynny $d\sigma/d\Omega$, zbadać granicę $\mu \to 0$.

4. Posługując się wzorem na $f^{(1)}(\theta)$ z poprzedniego zadania i zakładając, że przesunięcia fazowe $|\delta_l| \ll 1$, wyprowadzić wzór na δ_l wyrażony poprzez funkcje Legendre'a $Q_l(\zeta)$ zdefiniowane jako

$$Q_l(\zeta) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\zeta' \frac{P_l(\zeta')}{\zeta - \zeta'}.$$

Używając rozwinięcia dla $|\zeta| > 1$

$$\begin{aligned} Q_l(\zeta) \quad = \quad & \frac{l!}{1 \cdot 3 \ldots (2l+1)} \\ & \times \left\{ \frac{1}{\zeta^{l+1}} + \frac{(l+1)(l+2)}{2 \cdot (2l+3)} \frac{1}{\zeta^{l+3}} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2l+3)(2l+5)} \frac{1}{\zeta^{l+5}} + \ldots \right\} \end{aligned}$$

udowodnić, że

(a) δ_l jest ujemne (dodatnie) gdy potencjał jest przyciągający (odpychający), t.j. $V_0 < 0$ ($V_0 > 0$);

(b) dla fali de Broglie'a znacznie „dłuższej" niż zasięg potencjału

$$\delta_l = \text{const} \times k^{2l+1}.$$

(c) Znaleźć wzór na współczynnik proporcjonalności const.