Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 21 zestaw
23.4.2009. czwartek godz. 15:00, sala 057

1. Rozważyć rozpraszanie na sztywnej sferze o promieniu R:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad R < r \\ \\ \infty & \text{dla} \quad r < R \end{cases}$$

Pokazać, że dla rozpraszania niskoenergetycznego $kR << 1$, dla którego dominuje fala parcjalna $l = 0$ (gdzie k jest liczbą falową) całkowity przekrój czynny

$$\sigma = 4\pi R^2.$$

Nie jest to przekrój "geometryczny"πR^2. Spróbować wysumować wyższe fale parcjalne i wykazać, że w takim przypadku dostaje się

$$\sigma = 2\pi R^2.$$

2. Dla jamy potencjału z poprzedniego zestawu

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a < r \\ \\ -V_0 & \text{dla} \quad r < a \end{cases}$$

pokazaliśmy, że

$$\tan \delta_l = \frac{kR\, j_l'(kR) - \beta_l\, j_l(kr)}{kR\, y_l'(kR) - \beta_l\, y_l(kr)}.$$

Wyprowadzić analogiczne równanie bezpośrednio na f_l. (Uwaga: otrzymuje się zależność od sferycznej funkcji Hankla: $h_l^{(\pm)} = j_l \pm i y_l$).

(a) Pokazać, że

$$\begin{aligned} f_l(k) &\sim a_l k^{2l} \text{ dla } k \to 0, \\ f_l(k) &\to 0 \qquad \text{dla } k \to \infty. \end{aligned}$$

(b) Rozważyć przypadek z $l = 0$. Pokazać, że istnieją szczególne wartości V_0, dla których $f_0(0)$ jest nieskończone, i że te szczególne wartości V_0 odpowiadają głębokości jamy, przy której pojawia się nowy stan związany.

3. Udowodnić wzór

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{m^2}{\pi \hbar^4} \iint d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}' V(r) V(r') \frac{\sin^2 k\,|\vec{r} - \vec{r}'|}{k^2\,|\vec{r} - \vec{r}'|^2}.$$

Zadanie rozwiązać na dwa sposoby:

(a) całkując różniczkowy przekrój czynny wyliczony w pierwszym przybliżeniu Borna,

(b) przy pomocy twierdzenia optycznego dla amplitudy rozpraszania do przodu wyliczonej w *drugim* rzędzie (amplituda $f(0)$ w pierwszym rzędzie jest rzeczywista).