Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 17 zestaw
11.3.2009. środa godz. 8:30, sala na antresoli

1. Proszę dokończyć zadanie z poprzedniego zestawu: wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:

$$< \chi|m\frac{1}{\epsilon}\left((x_{k+1}-x_k)x_k - x_{k+1}(x_{k+1}-x_k)\right)|\psi >,$$

gdzie

$$\langle\chi\,|F|\,\psi\rangle_S = \iint dx_1 dx_2\, \chi^*(x_2)\left[\int_{x_1}^{x_2}[\mathcal{D}(x(t)]\;F[x(t)]\,e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}\right]\psi(x_1).$$

Zadanie wykonać rozważając ewolucję czasową funkcji falowej o jeden krok czasowy, podobnie jak w przypadku dowodu, że f. falowa spełnia równanie Schrödingera.

2. Dany jest wektor jednostkowy

$$\vec{n}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{n}_z + \sin\varphi\,\vec{n}_x.$$

- Jakie wartości własne ma operator spinu elektronu zrzutowany na $\vec{n}_\varphi$

$$S_\varphi^{(e)} = \vec{S}^{(e)}\cdot\vec{n}_\varphi$$

i jak wyglądają jego wektory własne

$$|e:+\varphi\rangle\,,\;|e:-\varphi\rangle\,,$$

(gdzie symbole e oznacz, że są to wektory własne dla elektronu w odróżnieniu od protonu, o którym będzie mowa w zad.2 i 3). Rozłożyć te wektory w bazie wektorów

$$|e:+\rangle\,,\;|e:-\rangle\,,$$

które biorą się z poprzednich w granicy $\varphi = 0$. Stąd otrymujemy prawdopodobieństwa $P_\pm$ otrzymania w wyniku pomiaru S_φ wartości $\pm\hbar/2$.

- Natychmiast po tym pomiarze dokonujemy pomiaru S_z (czyli $\varphi = 0$). Jakie są możliwe wyniki tych pomiarów i ile wynoszą prawdopodobieństwa ich otrzymania, w zależności od wyniku pierwszego pomiaru?
- Zakładamy teraz, że stan początkowy jest stanem własnym S_z. Następnie dokonujemy pomiaru S_φ. Jakie są prawdopodobieństwa otrzymania w kolejnym pomiarze tej samej wartości S_z, której odpowiadał stan początkowy?
- Załóżmy, że elektron został wyemitowany w stanie $|e:\pm\varphi\rangle$. Wykonano pomiar $S_\alpha^{(e)}$ gdzie $\vec{n}_\alpha$ zdefiniowane jest analogicznie do $\vec{n}_\varphi$. Ile wynosi prawdopodopieństwo znalezienia elektronu w stanie $|e:\pm\alpha\rangle$? Wyliczyć

$$\langle e:\pm|\,S_\alpha^{(e)}\,|e:\pm\varphi\rangle\,.$$

3. Atom wodoru rozpada się na proton i elektron, tak że układ jest po rozpadzie w stanie

$$|e:+\varphi\rangle \otimes |p:-\varphi\rangle\,. \tag{1}$$

Wyliczyć $P_+(\alpha)$ otrzymania w wyniku pomiaru $S_\alpha^{(e)}$ wartości $+\hbar/2$. W jakim stanie jest system po pomiarze? Czy pomiar wpływa na stan protonu? Wyliczyć korelację

$$E(\alpha,\beta) = \frac{\left\langle S_\alpha^{(e)} \otimes S_\beta^{(p)} \right\rangle - \left\langle S_\alpha^{(e)} \right\rangle \left\langle S_\beta^{(p)} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle S_\alpha^{(e)2} \right\rangle \left\langle S_\beta^{(p)2} \right\rangle}}$$

w stanie (1).

4. Załóżmy teraz, że po rozpadzie układ jest w stanie singletowym

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,|e:+\rangle \otimes |p:-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|e:-\rangle \otimes |p:+\rangle\,. \tag{2}$$

Wykonujemy pomiar $S_\alpha^{(e)}$elektronu. Jakie są możliwe wyniki i jakie są prawdopodobieństwa ich otrzymania? Załóżmy, że wynikiem pomiaru jest $+\hbar/2$. Następnie wykonujemy pomiar $S_\beta^{(p)}$ protonu. Jakie są możliwe wyniki i jakie są prawdopodobieństwa ich otrzymania? Czy te prawdopodobieństwa byłyby takie same, gdyby najpierw zmierzono spin protonu a potem elektronu? Wyliczyć $E(\alpha,\beta)$ dla stanu (2).

5. **Ukryte zmienne.** Załóżmy, że po rozpadzie atomu wodoru układ jest w stanie (1), ale kąt φ nie jest znany. Przyjmijmy, że rozkład prawdopodobieństwa tego kąta jest jednorodny. Kąt φ stanowi zmienną ukrytą i wszelkie średnie są teraz zdefiniowane jako

$$\langle A\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\ \langle e:+\varphi| \otimes \langle p:+\varphi|\ A\ |e:-\varphi\rangle \otimes |p:+\varphi\rangle\,.$$

Wyliczyć w tym modelu $E(\alpha,\beta)$ i porównać z wynikami otrzymanymi poprzednio.