

Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 16 zestaw  
4.3.2009. środa godz. 9:15, sala na antresoli

1. W podręczniku Feynmana-Hibbsa jest wyprowadzona tożsamość:

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x(s)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x(s)} \right\rangle_S,$$

która w wersji dyskretnej ma postać

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x_k} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x_k} \right\rangle_S,$$

gdzie

$$\langle F \rangle_S = \int [\mathcal{D}(x(t))] F[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}.$$

Korzystając z tej tożsamości wykazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:

$$\langle (x_{k+1} - x_k)^2 \rangle = \langle (y_{k+1} - y_k)^2 \rangle = \langle (z_{k+1} - z_k)^2 \rangle = \frac{i\epsilon\hbar}{m},$$

$$\langle (x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k) \rangle = \langle (z_{k+1} - z_k)(y_{k+1} - y_k) \rangle = \langle (x_{k+1} - x_k)(z_{k+1} - z_k) \rangle = 0,$$

gdzie opuściliśmy indeks  $S$  w wyrażeniach  $\langle \dots \rangle_S$ .

2. Wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:

$$\langle \chi | m \frac{1}{\epsilon} ((x_{k+1} - x_k)x_k - x_{k+1}(x_{k+1} - x_k)) | \psi \rangle,$$

gdzie

$$\langle \chi | F | \psi \rangle_S = \iint dx_1 dx_2 \chi^*(x_2) \left[ \int_{x_1}^{x_2} [\mathcal{D}(x(t))] F[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \right] \psi(x_1).$$

Zadanie wykonać rozważając ewolucję czasową funkcji falowej o jeden krok czasowy, podobnie jak w przypadku dowodu, że f. falowa spełnia równanie Schrödingera.

3. Wynik zadania 1 sugeruje, że aby otrzymać energię kinetyczną, należy wyliczyć element macierzowy wyrażenia

$$T = \frac{m}{2} \left\langle \chi \left| \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right)^2 - \frac{i\hbar}{m\epsilon} \right| \psi \right\rangle \quad (1)$$

gdyż

$$\frac{m}{2} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right)^2$$

daje wynik osobliwy. Posługując się techniką z zadania 2 wykazać, że  $T$  jest rzeczywiście energią kinetyczną. Rachunek trzeba wykonać do drugiego rzędu w  $\epsilon$ .