

Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 11 – 17.12.2008

1. Rozważmy ruch euklidesowy (w odwróconym potencjale $V \rightarrow -V$) o zadanej energii E , prowadzący $x_1 \rightarrow x_2$ ($x_1 < x_2$) w czasie T w potencjale $V(x) = \kappa(x^2 - a^2)^2$. Dla ruchów bez zawracania jest oczywiste, że jeśli $T \rightarrow \infty$, to $x_1 \rightarrow -a$, $x_2 \rightarrow a$ i $E \rightarrow 0$. Wykazać, że w tej granicy energia zmierza do zera exponencjalnie:

$$E = -8a^2 e^{-T}.$$

WSKAZÓWKA.

Skorzystać ze znanego z mechaniki klasycznej wzoru na T . Osobliwą całkę rozbić na część skończoną i rozbieżną w granicy $E = 0$ odejmując i dodając wyrażenie $((x - a)^2 + 2E)^{-1/2}$. W części skończonej można od razu położyć $E = 0$, a część rozbieżną trzeba policzyć dokładnie.

2. Bezpośrednim rachunkiem wyliczyć euklidesowy propagator oscylatora harmonicznego. Ponieważ rozważamy ruch w odwróconym potencjale, trajektoria klasyczna to po prostu $\bar{x}(\tau) = 0$. Rozważyć fluktuacje wokół tej trajektorii i wyliczyć wyznacznik operatora $D(\tau) = -m \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))$.
3. Wyznacznik *instantonowy*. Celem tego zadania jest wyliczenie jawnym rachunkiem czynnika

$$\kappa = \frac{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau)) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1 \right)},$$

gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/(8a^2)$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

- Dla potencjału $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$ wyliczyć klasyczną trajektorię odpowiadającą jednemu instantonowi (antinstantonowi). Wyliczyć działanie klasyczne odpowiadające jednemu instantonowi. Przy wyliczaniu działania warto skorzystać z faktu, że ruch ma całkowitą energię równą zeru. Jak wygląda propagator K dla takiego ruchu?
- Proszę pokazać, że równanie na wartości własne fluktuacji wokół instantonu (przyjmując $\tau_1 = 0$)

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau)) \right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau).$$

odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979).

- c.d.n.