Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 10 – 10.12.2008

1. Otrzymane w zadaniu (z poprzedniego zestawu) dotyczącym ruchu cząstki w polu magnetycznym, działanie – a zatem i propagator – nie są translacyjnie niezmiennicze. Jak zmienia się S_{cl} przy przesunięciu całego układu o wektor $\overrightarrow{\varepsilon}$? Niezmienniczość translacyjną można odzyskać wykonując równocześnie transformację cechowania na potencjale $\overrightarrow{A}$ opisującym stałe pole magnetyczne $\overrightarrow{B}$ skierowane wzdłuż osi z. Jaka to transformacja i jak zależy od wektora $\vec{\varepsilon}$?

   Wskazówka: Lagragian z poprzedniego zadania jest w rzeczywistości szczególnym przypadkiem Lagrangianu opisującego oddziaływanie cząstki naładowanej z potencjałem wektorowym:
$$L = \frac{m}{2}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}^2 + \frac{q}{c}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \cdot \overrightarrow{A}.$$
   Jaką postać ma potencjał $\overrightarrow{A}$, który sprowadza powyższy Lagrangian do poprzedniego?

2. Rozważyć ruch euklidesowy (w odwróconym potencjale $V \to -V$) o zadanej energii E, prowadzący $x_1 \to x_2$ $(x_1 < x_2)$ w czasie T w potencjale $V(x) = \kappa(x^2 - a^2)^2$. Dla ruchów bez zawracania jest oczywiste, że jeśli $T \to \infty$, to $x_1 \to -a$, $x_2 \to a$ i $E \to 0$. Wykazać, że w tej granicy energia zmierza do zera exponencjalnie:
$$E = -8a^2 e^{-T}.$$
   WSKAZÓWKA.

   Skorzystać ze znanego z mechaniki klasycznej wzoru na T. Osobliwą całkę rozbić na część skończoną i rozbieżną w granicy $E = 0$ odejmując i dodając wyrażenie $((x-a)^2 + 2E)^{-1/2}$. W części skończonej można od razu położyć $E = 0$, a część rozbieżną trzeba policzyć dokładnie.

3. Bezpośrednim rachunkiem wyliczyć euklidesowy propagator oscylatora harmonicznego. Ponieważ rozważamy ruch w odwróconym potencjale, trajektoria klasyczna to po prostu $\overline{x}(\tau) = 0$. Rozważyć fluktuacje wokół tej trajektorii i wyliczyć wyznacznik operatora $D(\tau) = -m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))$.

4. *Wyznacznik instantonowy.* Celem tego zadania jest wyliczenie jawnym rachunkiem czynnika
$$\kappa = \frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)},$$
   gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/(8a^2)$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

- Dla potencjału $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$ wyliczyć klasyczną trajektorię odpowiadającą jednemu instantonowi (antyinstantonowi). Wyliczyć działanie klasyczne odpowiadające jednemu instantonowi. Przy wyliczaniu działania warto skorzystać z faktu, że ruch ma całkowitą energię równą zeru. Jak wygląda propagator K dla takiego ruchu?
- Proszę pokazać, że równanie na wartości własne fluktuacji wokół instantonu (przyjmując $\tau_1 = 0$)

  $$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau).$$

  odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979).
- c.d.n.