Mechanika Kwantowa dla doktorantów
zestaw 1 i 2 – 8 i 15.10.2008

UWAGA: w listopadzie ćwiczenia 8:30 – 10:00, wykład 10:15 – 11:00 11:15 – 12:00 sala na antresoli.

1. Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa. Dokończyć zadanie rozpoczęte w dniu 8.10. wyliczając człon z trzema komutatorami:

$$e^A\, e^B = e^C, \tag{1}$$

gdzie

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left\{[A,[A,B]] - [B,[A,B]]\right\} - \frac{1}{24}[A,[B,[A,B]]] + ...$$

Przypomonienie:

Rozpatrzyliśmy operator $C(t)$ zdefiniowany jako

$$e^{C(t)} = e^A e^{tB}$$

i wyprowdziliśmy równanie różniczkowe jakie spełnia $C(t)$.

W tym celu udowodniliśmy wzór na pochodną eksponenty z operatora $C(t)$:

$$\frac{d}{dt}e^{C(t)} = \int_0^1 d\tau\, e^{\tau C(t)}\dot{C}(t)\, e^{(1-\tau)C(t)} = \int_0^1 d\tau\, e^{(1-\tau)C(t)}\dot{C}(t)\, e^{\tau C(t)}. \tag{2}$$

Następnie zdefiniowaliśmy operator Δ_X, gdzie X jest pewnym operatorem a działanie Δ_X na dany operator Y dane jest jako:

$$\Delta_X Y = [X, Y]. \tag{3}$$

Jest to wygodny zapis komutatora, gdyż można łatwo (formalnie) zapisać operator odwrotny.

Następnie wykazaliśmy, że:

$$\dot{C}(t) = \frac{\Delta_{C(t)}}{1 - e^{-\Delta_{C(t)}}}B = \frac{e^{\Delta_{C(t)}}\,\Delta_{C(t)}}{e^{\Delta_{C(t)}} - 1}B. \tag{4}$$

Aby scałkować ten wzór po t należy dokonać rozwinięcia

$$\dot{C}(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)}\,(z-1)^n\right]\, B\ ,$$

gdzie

$$z = e^{\Delta_A}e^{t\Delta_B}\ \ = 1 + \Delta_A + t\Delta_B + \dots$$

i całkować wyraz po wyrazie.

Wyprowadzenie to można znaleźć w dodatku D podręcznika J.M. Normanda "Rotations in Quantum Mechanics".

2. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem

$$\psi(x_2,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x_2,t_2;x_1,t_1)\psi(x_1,t_1)\,dx_1,$$

gdzie K jest dane jako całka po trajektoriach, spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2 = t_1+\epsilon$, gdzie ϵ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1 = x_2 - \eta$. Przedyskutować związek między η a ϵ i przeprowadzić rozwinięcie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1).

Dla chętnych: Rozwijając z dokładnością do ϵ^2 sprawdzić, czy odtwarza się kwadrat równania Schrödingera. (Okazuje się, że trzeba zmodyfikować człon potencjalny w Lagragianie.)

3. W chwili $t_0 = 0$ funkcja falowa dana jest jako superpozycja dwóch „Gaussów" odpowiadającym szczelinom w płaszczyźnie $x-y$:

$$\Psi(x_0,y_0,z_0,0) = e^{ipz_0}\left[\sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}e^{-\frac{(x_0-a)^2}{2\delta}} + \sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}e^{-\frac{(x_0+a)^2}{2\delta}}\right]\sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}e^{-\frac{y_0^2}{2\delta}}.$$

Zbadać, jak wygląda funkcja falowa po upływie czasu t, stosując propagację wg przepisu Feynmana. Wykreślić prawdopodobieństwo odpowiadające tej amplitudzie.