Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów 28

11.06.2008

1. Proszę przeczytać rozdział 11-4 z podręcznika Feynmana Hibbsa. Do oszacowania energii polaronu należy wyliczyć całkę

$$I = \int\limits_{\vec{r}(0)=\vec{x}}^{\vec{r}(\beta)=\vec{x}} \mathcal{D}\left[\vec{r}(\tau)\right]\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\tau\, \frac{d\vec{r}}{d\tau}^2} \frac{1}{1-e^{-\beta}} \int\limits_0^\beta dt \int\limits_0^t ds \frac{e^{-(t-s)}+e^{-\beta+(t-s)}}{|\vec{r}(t)-\vec{r}(s)|}. \tag{1}$$

Pokazać, że

$$I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta^{3/2}}{1-e^{-\beta}} J$$

gdzie

$$J = \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t ds\, \frac{e^{-\beta(t-s)}+e^{-\beta(1-(t-s))}}{\sqrt{(t-s)\,(1-(t-s))}} = \pi e^{-\frac{\beta}{2}} I_0\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

gdzie I_0 jest funkcją Bessela.

WSKAZÓWKA

Po pierwsze zapisać

$$\frac{1}{|\vec{r}(t)-\vec{r}(s)|} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{d^3\vec{k}}{k^2}\, e^{\int\limits_0^\beta \vec{f}(\tau)\,\vec{r}(\tau)\,d\tau},$$

gdzie $\vec{f}(\tau) = i\vec{k}\, \left(\delta\left(\tau - t\right) - \delta\left(\tau - s\right)\right)$. Zatem występująca w (1) całka po trajektoriach

$$\int\limits_{\vec{r}(0)=\vec{x}}^{\vec{r}(\beta)=\vec{x}} \mathcal{D}\left[\vec{r}(\tau)\right]\, e^{-\int\limits_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2}\frac{d\vec{r}}{d\tau}^2 - \vec{f}(\tau)\,\vec{r}(\tau)\right]} = \int\limits_{\vec{r}(0)=\vec{x}}^{\vec{r}(\beta)=\vec{x}} \mathcal{D}\left[\vec{r}(\tau)\right]\, e^{-S}$$

odpowiada ruchowi cząstki pod wpływem siły zaburzającej $\vec{f}$. Zapisać $\vec{r}(\tau) = \vec{r}_{cl}(\tau) + \vec{y}(\tau)$. Wtedy

$$S = \int\limits_0^\beta d\tau\, \left[\frac{1}{2}\dot{r}_{\rm cl}^2 - f\, r_{\rm cl}\right] + \int\limits_0^\beta d\tau\, \left[\dot{r}_{\rm cl}\dot{y} - f\, y\right] + \int\limits_0^\beta d\tau\, \dot{y}^2. \tag{2}$$

Drugi człon znika z r. ruchu, trzeci wycałkowany po $\mathcal{D}\left[\vec{y}(\tau)\right]$ daje normalizację, którą przyjmiemy jako 1. Do wyliczenia pozostaje

$$S_{\rm cl} = \int\limits_0^\beta d\tau\, \left[\frac{1}{2}\dot{r}_{\rm cl}^2 - f\, r_{\rm cl}\right], \tag{3}$$

co najlepiej zrobić wykonując całkę przez części. Aby znaleźć trajektorię klasyczną należałoby skonstruować funkcję Greena, ale ponieważ f jest sumą δ Diraka $\vec{r}_{cl}(\tau)$ można znaleźć bezpośrednim rachunkiem stosując metody analogiczne do znajodowania funkcji Greena:

$$\vec{r}_{\rm cl}(\tau) = i\vec{k}\begin{cases} -\frac{1}{\beta}\,(t-s)\,\tau & \text{for} \quad 0<\tau<s \\ \frac{1}{\beta}\,(\beta-t+s)\,\tau - s & \text{for} \quad s<\tau<t \\ -\frac{1}{\beta}\,(t-s)\,(\tau-\beta) & \text{for} \quad t<\tau<\beta \end{cases} . \tag{4}$$

Stąd łatwo pokazać

$$S_{\rm cl} = \frac{1}{2\beta}k^2\,(t-s)\,(\beta-t+s)\,. \tag{5}$$

Ostatni krok polega na wykazaniu, że

$$J = \int\limits_0^1 dx\,\frac{e^{-\beta x}}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{6}$$

co można sprowadzić do funkcji Bessela wprowadzając zmienną ξ: $x = 1/2 + \xi/2$.