Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 13

zestaw 16.1.2008.

1. *Wyznacznik instantonowy.* Celem tego zadania jest wyliczenie jawnym rachunkiem czynnika
$$\kappa = \frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)},$$
gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/\left(8a^2\right)$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

   WSKAZÓWKA:

   - Proszę pokazać, że równanie na wartości własne (przyjmując $\tau_0 = 0$)
   $$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau). \tag{1}$$
   odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979).
   - Proszę znaleźć spektrum stanów związanych dla tego równania. Warto postąpić nieco inaczej niż w podręczniku Landaua i Lifszica, przyjmując
   $$y_n(\tau) = e^{\alpha\tau} w_n(\tau),$$
   gdzie współczynnik α należy dobrać ($\alpha = \pm\sqrt{1-\lambda_n}$) przez podstawienie do równania (**??**). Następnie opłaca się wprowadzić zmienną $z = \tanh(\tau/2)$, a następnie $u = (1+z)/2$. W ten sposób równanie (**??**) można sprowadzić do równania hipergeometrycznego, którego rozwiązanie jest wielomianem.
   - Z warunku znikania rozwiązań w $\tau = \pm\infty$ dostaniemy kwantowanie α.
   - Przyczynek od spektrum ciągłego wyliczymy na następnych ćwiczeniach.
   - Literatura: S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1988), Section 7, Appendix 1.

     A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, V.A. Novikov and M.A. Shifman, *ABC of Instantons*, Sov. Phys. Usp. **24**, 195 (1982) [Usp. Fiz. Nauk **136**, 553 (1982)].

     T. Schafer and E.V. Shuryak, *Instantons in QCD*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323 [arXiv:hep-ph/9610451].