Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 12 – 9.1.2008

1. Rozpatrzyć ruch o zadanej energii E w potencjale $V(x)$. Wykazać, że dla ruchu od x_1 do x_2 w czasie T zachodzi:

$$\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{E - V(x_1)}\sqrt{E - V(x_2)}} \frac{\partial E}{\partial T}.$$

2. Rozważyć ruch euklidesowy (w odwróconym potencjale $V \to -V$) o zadanej energii E, prowadzący $x_1 \to x_2$ ($x_1 < x_2$) w czasie T w potencjale $V(x) = \kappa(x^2 - a^2)^2$. Dla ruchów bez zawracania jest oczywiste, że jeśli $T \to \infty$, to $x_1 \to -a$, $x_2 \to a$ i $E \to 0$. Wykazać, że w tej granicy energia zmierza do zera exponencjalnie:

$$E = -8a^2 e^{-T}.$$

   WSKAZÓWKA.

   Skorzystać ze znanego z mechaniki klasycznej wzoru na T. Osobliwą całkę rozbić na część skończoną i rozbieżną w granicy $E = 0$ odejmując i dodając wyrażenie $((x-a)^2 + 2E)^{-1/2}$. W części skończonej można od razu położyć $E = 0$, a część rozbieżną trzeba policzyć dokładnie.

3. Bezpośrednim rachunkiem wyliczyć euklidesowy propagator oscylatora harmonicznego. Ponieważ rozważamy ruch w odwróconym potencjale, trajektoria klasyczna to po prostu $\overline{x}(\tau) = 0$. Rozważyć fluktuacje wokół tej trajektorii i wyliczyć wyznacznik operatora $D(\tau) = -m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))$.

4. *Wyznacznik instantonowy.* Celem tego zadania jest wyliczenie jawnym rachunkiem czynnika

$$\kappa = \frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)},$$

   gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/(8a^2)$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

   - Dla potencjału $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$ wyliczyć klasyczną trajektorię odpowiadającą jednemu instantonowi (antyinstantonowi). Wyliczyć działanie klasyczne odpowiadające jednemu instantonowi. Przy wyliczaniu działania warto skorzystać z faktu, że ruch ma całkowitą energię równą zeru. Jak wygląda propagator K dla takiego ruchu?

- Proszę pokazać, że równanie na wartości własne fluktuacji wokół instantonu (przyjmując $\tau_1 = 0$)

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau).$$

  odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979).

- c.d.n.