Mechanika Kwantowa dla doktorantów
14 zestaw
23. i 24.1.2007

1. Korzystając z tożsamości

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x_k} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x_k} \right\rangle_S ,$$

wykazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:

$$< (x_{k+1} - x_k)^2 >=< (y_{k+1} - y_k)^2 >=< (z_{k+1} - z_k)^2 >= \frac{i\epsilon\hbar}{m},$$

$$< (x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k) >=< (z_{k+1} - z_k)(y_{k+1} - y_k) >=< (x_{k+1} - x_k)(z_{k+1} - z_k) >= 0,$$

gdzie opuściliśmy indeks S w wyrażeniach $\langle \ldots \rangle_S$.

2. Wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:

$$< \chi | m \frac{1}{\epsilon} \left((x_{k+1} - x_k) x_k - x_{k+1} (x_{k+1} - x_k) \right) | \psi >,$$

gdzie

$$\langle \chi \,| F |\, \psi \rangle_S = \iint dx_1 dx_2 \, \chi^*(x_2) \left[\int_{x_1}^{x_2} [\mathcal{D}(x(t)] \; F[x(t)] \, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \right] \psi(x_1).$$

Zadanie wykonać rozważając ewolucję czasową funkcji falowej o jeden krok czasowy, podobnie jak w przypadku dowodu, że f. falowa spełnia równanie Schrödingera.

3. Pokazać, że dla oscylatora harmonicznego zachodzą związki:

$$\begin{aligned}
< x(t) > &= \overline{x}(t) < 1 > \\
< x(t)x(s) > &= [\overline{x}(t)\overline{x}(s) + g(s,t)] < 1 > \\
< x(t)x(s)x(u) > &= [\overline{x}(t)\overline{x}(s)\overline{x}(u) + \overline{x}(t) g(s,u) + \overline{x}(s) g(t,u) + \overline{x}(u) g(t,s)] < 1 >
\end{aligned}$$

gdzie $\overline{x}(t)$ jest klasyczną trajektorią, a $g(t,s)$ dane jest wzorem:

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega \sin \omega T} \sin \omega (t_2 - t) \sin \omega (s - t_1), \quad s < t$$

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega \sin \omega T} \sin \omega (t_2 - s) \sin \omega (t - t_1), \quad t < s.$$

Wskazówka: Skorzystać ze wzoru

$$\left\langle \exp \frac{i}{\hbar} \int dt f(t) x(t) \right\rangle_S = \exp \frac{i}{\hbar} (S'_{cl} - S_{cl}) < 1 >_S$$

i podstawić do niego znane wyrażenia na dzialanie dla oscylatora bez wymuszenia (S_{cl}) i z wymuszeniem $f(t)$ (S'_{cl}).