Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 10
19 i 20.12.2006

1. Dokończyć zadanie z poprzedniego zestawu (grupa wtorkowa).

   Rozważyć ruch euklidesowy (w odwróconym potencjale) o zadanej energii E, prowadzący $x_1 \to x_2$ ($x_1 < x_2$) w czasie T w potencjale $V(x) = \kappa(x^2 - a^2)^2$. Dla ruchów bez zawracania jest oczywiste, że jeśli $T \to \infty$, to $x_1 \to -a$, $x_2 \to a$ i $E \to 0$. Wykazać, że w tej granicy
   $$E = -8a^2 e^{-T}.$$

   WSKAZÓWKA.

   Skorzystać ze znanego wzoru na T. Osobliwą całkę rozbić na część skończoną i rozbieżną w granicy $E = 0$ odejmując i dodając wyrażenie $((x-a)^2 + 2E)^{-1/2}$. W części skończonej można od razu położyć $E = 0$, a część rozbieżną trzeba policzyć dokładnie.

2. Dla potencjału $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$ wyliczyć klasyczną trajektorię odpowiadającą jednemu instantonowi (antyinstantonowi). Wyliczyć działanie klasyczne odpowiadające jednemu instantonowi. Przy wyliczaniu działania warto skorzystać z faktu, że ruch ma całkowitą energię równą zeru. Jak wygląda propagator K dla takiego ruchu?

3. Bezpośrednim rachunkiem wyliczyć euklidesowy propagator oscylatora harmonicznego. Ponieważ rozważamy ruch w odwróconym potencjale, trajektoria klasyczna to po prostu $\bar{x}(\tau) = 0$. Rozważyć fluktuacje wokół tej trajektorii i wyliczyć wyznacznik operatora $D(\tau) = -m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))$.

4. Rozpatrzyć przejście przez barierę potencjału w przybliżeniu WKB (n.p. Landau, Lifszyc par.50, Schiff par. 34). Wyliczyć współczynnik przejścia przez barierę opisaną potencjałem $V(x)$:
   $$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ V_0 - Fx & \text{dla} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
   dla cząstki o energii $0 < E < V_0$.