Mechanika Kwantowa dla doktorantów
zestaw 1 i 2 – 4 i 11.10.2006

1. Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa.

   Udowodnić, że dla dwóch niekomutujących operatorów A i B zachodzi

   $$e^A\, e^B = e^C, \tag{1}$$

   gdzie

   $$C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left\{[A,[A,B]] - [B,[A,B]]\right\} - \frac{1}{24}[A,[B,[A,B]]] + ...$$

   W tym celu rozpatrzyć operator $C(t)$ zdefiniowany jako

   $$e^{C(t)} = e^A e^{tB}$$

   i wyprowdzić równanie różniczkowe jakie spełnia $C(t)$.

   W tym celu udowodnić wzór na pochodną eksponenty z operatora $C(t)$:

   $$\frac{d}{dt}e^{C(t)} = \int_0^1 d\tau\, e^{\tau C(t)}\dot{C}(t)\, e^{(1-\tau)C(t)} = \int_0^1 d\tau\, e^{(1-\tau)C(t)}\dot{C}(t)\, e^{\tau C(t)}. \tag{2}$$

   Następnie zdefiniować operator Δ_X, gdzie X jest pewnym operatorem a działanie Δ_X na dany operator Y dane jest jako:

   $$\Delta_X\, Y = [X,Y]. \tag{3}$$

   Jest to wygodny zapis komutatora, gdyż można łatwo (formalnie) zapisać operator odwrotny. Proszę pokazać:

   $$e^A\, B\, e^{-A} = e^{\Delta_A} B = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \dots . \tag{4}$$

   W tym celu należy zdefiniować

   $$B(\tau) = e^{\tau A}\, B\, e^{-\tau A}, \text{ with } B(0) = B \tag{5}$$

   napisać równanie różniczkowe na B i rozwiązać je.

   Korzystając z własności (4) pokazać, że:

   $$\dot{C}(t) = \frac{\Delta_{C(t)}}{1 - e^{-\Delta_{C(t)}}} B = \frac{e^{\Delta_{C(t)}}\,\Delta_{C(t)}}{e^{\Delta_{C(t)}} - 1} B. \tag{6}$$

   Aby scałkować ten wzór po t należy dokonać rozwinięcia

   $$\dot{C}(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)}\,(z-1)^n\right]\, B\ ,$$

gdzie

$$z = e^{\Delta_A} e^{t\Delta_B}$$

i całkować wyraz po wyrazie.

Wyprowadzenie to można znaleźć w dodatku D podręcznika J.M. Normanda "Rotations in Quantum Mechanics".

2. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, t_2; x_1, t_1)\psi(x_1, t_1)\, dx_1,$$

gdzie K jest dane jako całka po trajektoriach, spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2 = t_1 + \epsilon$, gdzie ϵ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1 = x_2 - \eta$. Przedyskutować związek między η a ϵ i przeprowadzić rozwinięcie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1).

Dla chętnych: Rozwijając z dokładnością do ϵ^2 sprawdzić, czy odtwarza się kwadrat równania Schrödingera. (Okazuje się, że trzeba zmodyfikować człon potencjalny w Lagragianie.)

3. W chwili $t_0 = 0$ funkcja falowa dana jest jako superpozycja dwóch „Gaussów" odpowiadającym szczelinon w płaszczyźnie $x - y$:

$$\Psi(x_0, y_0, z_0, 0) = e^{ipz_0}\left[\sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}e^{-\frac{(x_0-a)^2}{2\delta}} + \sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}e^{-\frac{(x_0+a)^2}{2\delta}}\right]\sqrt{\frac{1}{2\pi\delta}}e^{-\frac{y_0^2}{2\delta}}.$$

Zbadać, jak wygląda funkcja falowa po upływie czasu t, stosując propagację wg przepisu Feynmana. Wykreślić prawdopodobieństwo odpowiadające tej amplitudzie.