Mechanika Kwantowa dla doktorantów
26 zestaw – 23.5.2006

1. Załóżmy, że umiemy rozwiązać równanie radialne dla centralnego potencjału $V(r)$o skończonym zasięgu R. Rozwiązanie to, dla $E = \hbar^2 k^2/2m > 0$ można zapisać ogólnie jako
$$\sum_l (2l+1) i^l A_l(r) P_l(\cos\vartheta),$$
gdzie $A_l(r)$ jest w związku z tym znaną funkcją. Pokazać, że
$$\tan\delta_l = \frac{kR\, j_l'(kR) - \beta_l\, j_l(kr)}{kR\, y_l'(kR) - \beta_l\, y_l(kr)}.$$
W szczególności znaleźć jawną postać równania na $\delta_0$dla skończonej jamy potencjału
$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a < r \\ -V_0 & \text{dla} \quad r < a \end{cases}$$
Jak zmienia się δ_0 wraz ze zmianą V_0.

2. Dla jamy potencjału z zad.2. wyprowadzić analogiczne równanie bezpośrednio na f_l. (Uwaga: otrzymuje się zależność od sferycznej funkcji Hankla: $h_l^{(\pm)} = j_l \pm i y_l$).

   (a) Pokazać, że
   $$\begin{aligned} f_l(k) &\sim a_l k^{2l} \text{ dla } k \to 0, \\ f_l(k) &\to 0 \qquad \text{dla } k \to \infty. \end{aligned}$$

   (b) Rozważyć przypadek z $l = 0$. Pokazać, że istnieją szczególne wartości V_0, dla których $f_0(0)$ jest nieskończone, i że te szczególne wartości V_0 odpowiadają głębokości jamy, przy której pojawia się nowy stan związany.