Mechanika Kwantowa dla doktorantów
25 zestaw – 16.5.2006

1. Rozważyć rozpraszanie na doskonale twardej kuli:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a < r \\ \\ \infty & \text{dla} \quad r < a \end{cases}.$$

   (a) Wyprowadzić wyrażenie na tangens przesunięcia fazowego dla dowolnego l:

$$\tan(\delta_l) = \frac{j_l(kR)}{y_l(kR)},$$

   gdzie j_l i y_l są liniowo niezależnymi rozwiązaniami sferycznego równania Bessela. (Uwaga: $y_l$oznacza się czasami n_l.)

   (b) Wykazać, że $l = 0$ wystarcza żeby opisać rozpraszanie niskoenergetyczne, w tym celu wykazać, że

$$\delta_l \sim -k^{2l+1}.$$

   (c) Wykazać, że jeżeli w wyrażeniu na całkowity przekrój czynny uwzględnić fale parcjalne do $l_{\text{max.}} = kR$, to

$$\sigma_{\text{tot.}} = 2\pi R^2.$$

2. Załóżmy, że umiemy rozwiązać równanie radialne dla centralnego potencjału $V(r)$o skończonym zasięgu R. Rozwiązanie to, dla $E = \hbar^2 k^2/2m > 0$ można zapisać ogólnie jako

$$\sum_l (2l+1) i^l A_l(r) P_l(\cos\vartheta),$$

gdzie $A_l(r)$ jest w związku z tym znaną funkcją. Pokazać, że

$$\tan\delta_l = \frac{kR\, j_l'(kR) - \beta_l\, j_l(kr)}{kR\, y_l'(kR) - \beta_l\, y_l(kr)}.$$

W szczególności znaleźć jawną postać równania na $\delta_0$dla skończonej jamy potencjału

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a < r \\ \\ -V_0 & \text{dla} \quad r < a \end{cases}$$

Jak zmienia się δ_0 wraz ze zmianą V_0.

3. Dla jamy potencjału z zad.2. wyprowadzić analogiczne równanie bezpośrednio na f_l. (Uwaga: otrzymuje się zależność od sferycznej funkcji Hankla: $h_l^{(\pm)} = j_l \pm i y_l$).

(a) Pokazać, że

$$\begin{aligned} f_l(k) &\sim a_l k^{2l} \text{ dla } k \to 0, \\ f_l(k) &\to 0 \qquad \text{dla } k \to \infty. \end{aligned}$$

(b) Rozważyć przypadek z $l = 0$. Pokazać, że istnieją szczególne wartości V_0, dla których $f_0(0)$ jest nieskończone, i że te szczególne wartości V_0 odpowiadają głębokości jamy, przy której pojawia się nowy stan związany.