Mechanika Kwantowa dla doktorantów
24 zestaw – 9.5.2006

1. Posługując się wzorem na $f^{(1)}(\theta)$ z poprzedniego zestawu dla rozpraszania na potencjale Yukawy i zakładając, że przesunięcia fazowe $|\delta_l| \ll 1$, wyprowadzić wzór na δ_l wyrażony poprzez funkcje Legendre'a $Q_l(\zeta)$ zdefiniowane jako

$$Q_l(\zeta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\zeta' \frac{P_l(\zeta')}{\zeta - \zeta'}.$$

Używając rozwinięcia dla $|\zeta| > 1$

$$\begin{aligned} Q_l(\zeta) &= \frac{l!}{1 \cdot 3 \ldots (2l+1)} \\ &\times \left\{ \frac{1}{\zeta^{l+1}} + \frac{(l+1)(l+2)}{2 \cdot (2l+3)} \frac{1}{\zeta^{l+3}} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2l+3)(2l+5)} \frac{1}{\zeta^{l+5}} + \ldots \right\} \end{aligned}$$

udowodnić, że

   (a) δ_l jest ujemne (dodatnie) gdy potencjał jest przyciągający (odpychający), t.j. $V_0 < 0$ ($V_0 > 0$);

   (b) dla fali de Broglie'a znacznie „dłuższej" niż zasięg potencjału

$$\delta_l = \text{const} \times k^{2l+1}.$$

   (c) Znaleźć wzór na współczynnik proporcjonalności const.

2. Równanie Lippmanna-Schwingera ma postać

$$\left|\psi^{(\pm)}\right\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\varepsilon} V \left|\psi^{(\pm)}\right\rangle \tag{1}$$

gdzie $\pm i\varepsilon$ definiuje sposób obchodzenia biegunów w płaszczyźnie zespolonego E (oznaczanego czasami jako z). Zapisać równanie (1) w reprezentacji pędów i w reprezetacji położeń. W tym drugim przypadku należy wykazać, że

$$G^{(\pm)}(\vec{x}, \vec{x}') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hbar^2}{2m} \left\langle \vec{x} \left| \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\varepsilon} \right| \vec{x}' \right\rangle = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|},$$

gdzie $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ (patrz wzór (41) z wykładu 16).

3. Rozważyć rozpraszanie na doskonale twardej kuli:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a < r \\ \infty & \text{dla} \quad r < a \end{cases}.$$

(a) Wyprowadzić wyrażenie na przesunięcie fazowe w fali s.

(b) Wyprowadzić wzór na całkowity przekrój czynny w granicy nieskończenie małej energii $k \to 0$. Porównać ze wyrażeniem na geometryczny przekrój czynny πa^2.

Wskazówka: użyć rozwinięcia na fale parcjalne, nie trzeba znać szczegółowych własności funkcji Bessela, wystarczy rozwiązać r. radialne dla $l = 0$.

(c) Wykazać, że $l = 0$ wystarcza żeby opisać rozpraszanie niskoenergetyczne.