Mechanika Kwantowa dla doktorantów
23 zestaw – 25.4.2006

Rozpraszanie

1. Udowodnić wzór
$$\sigma_{\rm tot} = \frac{m^2}{\pi\hbar^4}\iint d^3\vec{r}\,d^3\vec{r}'\,V(r)V(r')\frac{\sin^2 k\,|\vec{r}-\vec{r}'|}{k^2\,|\vec{r}-\vec{r}'|^2}.$$
Zadanie rozwiązać na dwa sposoby:
   (a) całkując różniczkowy przekrój czynny wyliczony w pierwszym przybliżeniu Borna,
   (b) przy pomocy twierdzenia optycznego dla amplitudy rozpraszania do przodu wyliczonej w *drugim* rzędzie (amplituda $f(0)$ w pierwszym rzędzie jest rzeczywista).

2. Rozważyć rozpraszanie na potencjale Yukawy:
$$V(r) = V_0\frac{e^{-\mu r}}{\mu r},$$
gdzie $1/\mu$ jest zasięgiem oddziaływania. Wyliczyć amplitudę rozpraszania w pierwszym przybliżeniu Borna $f^{(1)}(\theta)$, gdzie θ jest kątem rozproszenia. Wyliczyć różniczkowy przekrój czynny $d\sigma/d\Omega$, zbadać granicę $\mu\to 0$.

3. Posługując się wzorem na $f^{(1)}(\theta)$ z poprzedniego zadania i zakładając, że przesunięcia fazowe $|\delta_l|\ll 1$, wyprowadzić wzór na δ_l wyrażony poprzez funkcje Legendre'a $Q_l(\zeta)$ zdefiniowane jako
$$Q_l(\zeta) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\zeta'\,\frac{P_l(\zeta')}{\zeta-\zeta'}.$$
Używając rozwinięcia dla $|\zeta|>1$
$$\begin{aligned} Q_l(\zeta) &= \frac{l!}{1\cdot 3\ldots(2l+1)} \\ &\quad\times\left\{\frac{1}{\zeta^{l+1}} + \frac{(l+1)(l+2)}{2\cdot(2l+3)}\frac{1}{\zeta^{l+3}} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{2\cdot 4\cdot(2l+3)(2l+5)}\frac{1}{\zeta^{l+5}} + \ldots\right\}\end{aligned}$$
udowodnić, że
   (a) δ_l jest ujemne (dodatnie) gdy potencjał jest przyciągający (odpychający), t.j. $V_0<0$ ($V_0>0$);
   (b) dla fali de Broglie'a znacznie „dłuższej" niż zasięg potencjału
$$\delta_l = \text{const}\times k^{2l+1}.$$
   (c) Znaleźć wzór na współczynnik proporcjonalności const.