Mechanika Kwantowa dla doktorantów
21 zestaw – 7.4.2006

1. Korelacje spinowe – zmienne ukryte

2. Dany jest wektor jednostkowy

$$\vec{n}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{n}_z + \sin\varphi\,\vec{n}_x.$$

Jakie wartości własne ma operator spinu elektronu zrzutowany na $\vec{n}_\varphi$

$$S^{(e)}_\varphi = \vec{S}^{(e)} \cdot \vec{n}_\varphi$$

i jak wyglądają jego wektory własne

$$|e:+\varphi\rangle\,,\ |e:-\varphi\rangle\,.$$

Rozłożyć te wektory w bazie wektorów

$$|e:+\rangle\,,\ |e:-\rangle\,,$$

które biorą się z poprzednich w granicy $\varphi = 0$.

Załóżmy, że elektron został wyemitowany w stanie $|e:\pm\varphi\rangle$. Wykonano pomiar $S^{(e)}_\alpha$ gdzie $\vec{n}_\alpha$ zdefiniowane jest analogicznie do $\vec{n}_\varphi$. Ile wynosi prawdopodopieństwo znalezienia elektronu w stanie $|e:\pm\alpha\rangle$? Wyliczyć

$$\langle e:\pm|\, S^{(e)}_\alpha\, |e:\pm\varphi\rangle\,.$$

3. Atom wodoru rozpada się na proton i elektron, tak że układ jest po rozpadzie w stanie

$$|e:+\varphi\rangle \otimes |p:-\varphi\rangle\,. \tag{1}$$

Wyliczyć $P_+(\alpha)$ otrzymania w wyniku pomiaru $S^{(e)}_\alpha$ wartości $+\hbar/2$. W jakim stanie jest system po pomiarze? Czy pomiar wpływa na stan protonu? Wyliczyć korelację

$$E(\alpha,\beta) = \frac{\left\langle S^{(e)}_\alpha \otimes S^{(p)}_\beta \right\rangle - \left\langle S^{(e)}_\alpha \right\rangle \left\langle S^{(p)}_\beta \right\rangle}{\sqrt{\left\langle S^{(e)2}_\alpha \right\rangle \left\langle S^{(p)2}_\beta \right\rangle}}$$

w stanie (**??**).

4. Załóżmy teraz, że po rozpadzie układ jest w stanie singletowym

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,|e:+\rangle \otimes |p:-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|e:-\rangle \otimes |p:+\rangle\,. \tag{2}$$

Wykonujemy pomiar $S^{(e)}_\alpha$elektronu. Jakie są możliwe wyniki i jakie są prawdopodobieństwa ich otrzymania? Załóżmy, że wynikiem pomiaru jest $+\hbar/2$. Następnie wykonujemy pomiar $S^{(p)}_\beta$ protonu. Jakie są możliwe wyniki i jakie są prawdopodobieństwa ich otrzymania? Czy te prawdopodobieństwa byłyby takie same, gdyby najpierw zmierzono spin protonu a potem elektronu? Wyliczyć $E(\alpha,\beta)$ dla stanu (**??**).

5. Ukryte zmienne. Załóżmy, że po rozpadzie atomu wodoru układ jest w stanie (**??**), ale kąt φ nie jest znany. Przyjmijmy, że rozkład prawdopodobieństwa tego kąta jest jednorodny. Kąt φ stanowi zmienną ukrytą i wszelkie średnie są teraz zdefiniowane jako

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \langle e : +\varphi| \otimes \langle p : +\varphi| \; A \; |e : -\varphi\rangle \otimes |p : +\varphi\rangle \, .$$

Wyliczyć w tym modelu $E(\alpha, \beta)$ i porównać z wynikami otrzymanymi poprzednio.