Mechanika Kwantowa dla doktorantów
20 zestaw – 4.4.2006

1. Rozważyć elektron uwięziony we wnęce między dwoma koncentrycznymi cylindrami o promieniach $\rho_a < \rho_b$ i wysokości L. We wnętrzu mniejszego cylindra jest jednorodne pole magnetyczne B skierowane wzdłuż osi z. Znaleźć poziomy energetyczne dla przypadku bez pola (możliwe jest tylko wyrażenie tej energii poprzez zera wyznacznika złożonego z funkcji Bessela). Następnie porównać energię stanu podstawowego dla przypadku bez pola z przypadkiem, gdy pole jest niezerowe. Pokazać, że z warunku aby energie te były równe dostajemy kwantowanie strumienia
$$\pi \rho_a^2 B = \frac{2\pi\hbar c}{e} n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. Dany jest wektor jednostkowy
$$\vec{n}_\varphi = \cos\varphi\, \vec{n}_z + \sin\varphi\, \vec{n}_x.$$
Jakie wartości własne ma operator spinu elektronu zrzutowany na $\vec{n}_\varphi$
$$S_\varphi^{(e)} = \vec{S}^{(e)} \cdot \vec{n}_\varphi$$
i jak wyglądają jego wektory własne
$$|e : +\varphi\rangle\,,\ |e : -\varphi\rangle\,.$$
Rozłożyć te wektory w bazie wektorów
$$|e : +\rangle\,,\ |e : -\rangle\,,$$
które biorą się z poprzednich w granicy $\varphi = 0$.

Załóżmy, że elektron został wyemitowany w stanie $|e : \pm\varphi\rangle$. Wykonano pomiar $S_\alpha^{(e)}$ gdzie $\vec{n}_\alpha$ zdefiniowane jest analogicznie do $\vec{n}_\varphi$. Ile wynosi prawdopodopieństwo znalezienia elektronu w stanie $|e : \pm\alpha\rangle$? Wyliczyć
$$\langle e : \pm |\, S_\alpha^{(e)}\, | e : \pm\varphi\rangle\,.$$

3. Atom wodoru rozpada się na proton i elektron, tak że układ jest po rozpadzie w stanie
$$|e : +\varphi\rangle \otimes |p : -\varphi\rangle\,. \tag{1}$$
Wyliczyć $P_+(\alpha)$ otrzymania w wyniku pomiaru $S_\alpha^{(e)}$ wartości $+\hbar/2$. W jakim stanie jest system po pomiarze? Czy pomiar wpływa na stan protonu? Wyliczyć korelację
$$E(\alpha,\beta) = \frac{\left\langle S_\alpha^{(e)} \otimes S_\beta^{(p)} \right\rangle - \left\langle S_\alpha^{(e)} \right\rangle \left\langle S_\beta^{(p)} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle S_\alpha^{(e)2} \right\rangle \left\langle S_\beta^{(p)2} \right\rangle}}$$
w stanie (**??**).

4. Załóżmy teraz, że po rozpadzie układ jest w stanie singletowym

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |e : +\rangle \otimes |p : -\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |e : -\rangle \otimes |p : +\rangle . \tag{2}$$

Wykonujemy pomiar $S_\alpha^{(e)}$elektronu. Jakie są możliwe wyniki i jakie są prawdopodobieństwa ich otrzymania? Załóżmy, że wynikiem pomiaru jest $+\hbar/2$. Następnie wykonujemy pomiar $S_\beta^{(p)}$ protonu. Jakie są możliwe wyniki i jakie są prawdopodobieństwa ich otrzymania? Czy te prawdopodobieństwa byłyby takie same, gdyby najpierw zmierzono spin protonu a potem elektronu? Wyliczyć $E(\alpha, \beta)$ dla stanu (**??**).

5. Ukryte zmienne. Załóżmy, że po rozpadzie atomu wodoru układ jest w stanie (**??**), ale kąt φ nie jest znany. Przyjmijmy, że rozkład prawdopodobieństwa tego kąta jest jednorodny. Kąt φ stanowi zmienną ukrytą i wszelkie średnie są teraz zdefiniowane jako

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \ \langle e : +\varphi | \otimes \langle p : +\varphi | \ A \ |e : -\varphi\rangle \otimes |p : +\varphi\rangle .$$

Wyliczyć w tym modelu $E(\alpha, \beta)$ i porównać z wynikami otrzymanymi poprzednio.