Mechanika Kwantowa dla doktorantów
19 zestaw – 28.3.2006

1. Dokoczenie zadania z poprzedniego zestawu. Cząstka o spinie 1/2 znajduje się w polu magnetycznym

$$\vec{B} = -B_0\,\vec{e}_z + B_1\,(\vec{e}_x \cos\omega t + \vec{e}_y \sin\omega t)\,.$$

Znaleźć prawdopodobieństwo przejścia i pozostania w stanie o spinie do góry (lub w dół). Jak należy dobrać ω, aby prawdopodobieństwo to było jak największe. Zadanie rozwiązać na dwa sposoby.

   (a) Rozłożyć funkcję falową w bazie

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t)\,|+\rangle + c_-(t)\,|-\rangle$$

   i zapisać równania na $c_\pm(t)$. Warto przedefiniować współczyniki

$$c_\pm(t) = \tilde{c}_\pm(t)e^{\mp i\omega t/2}$$

   tak aby hamiltonian był rzeczywisty. Zamiast brutalnej diagonalizacji warto użyć wzoru

$$e^{i\alpha\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\alpha + i\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\alpha,$$

   gdzie $\vec{n}$ jest wektorem jednostkowym.

   (b) Inna metoda polega na przejściu do układu rotującego poprzez transformację

$$|\psi(t)\rangle = D(t)\,|\psi'(t)\rangle\,,$$

   gdzie $D(t)$ odpowiada obrotowi wokół osi z z pewną częstością α, którą należy tak dobrać, aby hamiltonian efektywny

$$H_{eff} = D^\dagger(t)H(t)D(t) - i\hbar D^\dagger(t)\frac{d}{dt}D(t)$$

   nie zależał od czasu. W tym celu warto zapisać $H(t)$ przy pomocy macierzy σ_z oraz $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$.

2. Macierz obrotu można sparametryzować przez 3 kąty Eulera

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma),$$

gdzie

$$R_i(\varphi) = e^{-i\varphi\,J_i}.$$

Skonstruwać jawną postać $D^{(1/2)}(R)$ dla spinu 1/2. Zgodnie z oczekiwaniami opartymi na teorii grupy obrotów macierz $D^{(1/2)}(R)$ opisuje obrót o jeden kąt ϕ wokół pewnej osi $\vec{n}$ (patrz ostatni wzór w zad 2.a). Znaleźć ϕ w funkcji α, β i γ (znalezienie $\vec{n}$ jest nieco trudniejsze).

3. Rozważyć elektron uwięziony we wnęce między dwoma koncentrycznymi cylindrami o promieniach $\rho_a < \rho_b$ i wysokości L. We wnętrzu mniejszego cylindra jest jednorodne pole magnetyczne B skierowane wzdłuż osi z. Znaleźć poziomy energetyczne dla przypadku bez pola (możliwe jest tylko wyrażenie tej energii poprzez zera wyznacznika złożonego z funkcji Bessela). Następnie porównać energię stanu podstawowego dla przypadku bez pola z przypadkiem, gdy pole jest niezerowe. Pokazać, że z warunku aby energie te były równe dostajemy kwantowanie strumienia

$$\pi\rho_a^2 B = \frac{2\pi\hbar c}{e} n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$