Mechanika Kwantowa dla doktorantów
18 zestaw – 21.3.2006

1. Precesja spinu. Operator momentu magnetycznego cząstki o spinie 1/2 ma postać

$$\vec{\mu} = g\,\vec{S},$$

gdzie $\vec{S}$ jest operatorem spinu a g nazywa się współczynnikiem gyromagnetycznym. Hamiltonian oddziaływania z polem magnetycznym dany jest wzorem:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}.$$

Wykazać, że równania Heisenberga dla ewolucji spinu mają postać:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -\Omega\times\vec{S},$$

gdzie $\vec{\Omega} = g\,\vec{B}$.

   (a) Rozwiązać te równania dla pola $\vec{B}$ skierowanego wzdłuż osi z, przyjmując warunki początkowe $\vec{S}(t=0) = (S_x, S_y, S_z)$.

   (b) Znaleźć to samo rozwiązanie korzystając z definicji wiążącej operatory w obrazie Heisenberga z obrazem Schrödingera. Zastosować wzór wyprowadzony na pierwszych ćwiczeniach na

$$e^{A}Be^{-A} = ...$$

2. Cząstka o spinie 1/2 znajduje się w polu magnetycznym

$$\vec{B} = -B_0\,\vec{e}_z + B_1\left(\vec{e}_x\cos\omega t + \vec{e}_y\sin\omega t\right).$$

Znaleźć prawdopodobieństwo przejścia i pozostania w stanie o spinie do góry (lub w dół). Jak należy dobrać ω, aby prawdopodobieństwo to było jak największe. Zadanie rozwiązać na dwa sposoby.

   (a) Rozłożyć funkcję falową w bazie

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t)\,|+\rangle + c_-(t)\,|-\rangle$$

   i zapisać równania na $c_\pm(t)$. Warto przedefiniować współczyniki

$$c_\pm(t) = \tilde{c}_\pm(t)e^{\mp i\omega t/2}$$

   tak aby hamiltonian był rzeczywisty. Zamiast brutalnej diagonalizacji warto użyć wzoru

$$e^{i\alpha\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\alpha + i\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\alpha,$$

   gdzie $\vec{n}$ jest wektorem jednostkowym.

(b) Inna metoda polega na przejściu do układu rotującego poprzez transformację

$$|\psi(t)\rangle = D(t)\,|\psi'(t)\rangle\,,$$

gdzie $D(t)$ odpowiada obrotowi wokół osi z z pewną częstością α, którą należy tak dobrać, aby hamiltonian efektywny

$$H_{eff} = D^{\dagger}(t)H(t)D(t) - i\hbar D^{\dagger}(t)\frac{d}{dt}D(t)$$

nie zależał od czasu. W tym celu warto zapisać $H(t)$ przy pomocy macierzy σ_z oraz $\sigma_{\pm} = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$.

3. Macierz obrotu można sparametryzować przez 3 kąty Eulera

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma),$$

gdzie

$$R_i(\varphi) = e^{-i\varphi J_i}.$$

Skonstruować jawną postać $D^{(1/2)}(R)$ dla spinu 1/2. Zgodnie z oczekiwaniami opartymi na teorii grupy obrotów macierz $D^{(1/2)}(R)$ opisuje obrót o jeden kąt ϕ wokół pewnej osi $\vec{n}$ (patrz ostatni wzór w zad 2.a). Znaleźć ϕ w funkcji α, β i γ (znalezienie $\vec{n}$ jest nieco trudniejsze).