Mechanika Kwantowa dla doktorantów
16 zestaw – 28.2.2006

1. Dokończyć zadanie z poprzedniego zestawu. Znaleźć w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo przejścia dla potencjału $V(x,t) = V(x)f(t)$, gdzie $f(t)$ dane jest wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\gamma t}, & t < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\gamma t}, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\gamma(T-t)}, & \frac{T}{2} < t < T, \\ \frac{1}{2}e^{-\gamma(t-T)}, & T < t. \end{cases}$$

   Odpowiedź:

$$P(n \to m) = \left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (E_m - E_n)^2}\right)^2 |V_{mn}|^2 \frac{4\sin^2 \frac{(E_m-E_n)T}{2\hbar}}{(E_m - E_n)^2}.$$

   Porównać z wynikiem, kiedy zaburzenie włączane jest gwałtownie w jednej chwili.

2. Pokazać pod jakimi warunkami w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo przejścia dla potencjału:

$$V(x,t) = 2\,V(x)\,\cos(\omega t)$$

   wynosi:

$$\frac{dP(n \to m)}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{mn}|^2 \left\{\delta(E_m - E_n - \hbar\omega) + \delta(E_m - E_n + \hbar\omega)\right\}.$$

3. Rozważmy system o 2 poziomach energetycznych $E_1 = E_2$, oraz potencjał V taki, że: $V_{12} = V_{21}^\star$, oraz $V_{11} \neq V_{22}$. Potencjał włączamy w chwili $t = 0$. Obliczyć prawdopodobieństwa przejścia ze stanu $1 \to 2$ i $2 \to 1$ oraz pozostania w stanie 1 lub w stanie 2. Rachunek wykonać:

   (a) ściśle,

   (b) w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń,

   (c) także w drugim rzędzie.

   Przedyskutować zakres stosowalności rachunku zaburzeń. Przedyskutować przypadki graniczne, kiedy $V_{11} = V_{22}$, kiedy oba te elementy są równe zero, a stany 1 i 2 są zdegenerowane.

   WSKAZÓWKA

   Skorzystać z równania różniczkowego na $a(t)_{mn}$. Warto zdefiniować $E = (E_1+E_2)/2$, $\varepsilon = (E_1 - E_2)/2$, $U = (V_{11} + V_{22})/2$ i $u = (V_{11} - V_{22})/2$. W tak zdefiniowanych zmiennych można odseparować część diagonalną, która daje tylko nieistotną fazę.