Mechanika Kwantowa dla dok torantów - 13
zestaw 17.1.2006

1. W podręczniku Feynmana-Hibbsa jest wyprowadzona tożsamość:
$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x(s)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x(s)} \right\rangle_S ,$$
która w wersji dyskretnej ma postać
$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x_k} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x_k} \right\rangle_S ,$$
gdzie
$$\langle F \rangle_S = \int [\mathcal{D}(x(t)]\; F[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}.$$
Korzystając z tej tożsamości wykazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:
$$< (x_{k+1} - x_k)^2 >=< (y_{k+1} - y_k)^2 >=< (z_{k+1} - z_k)^2 >= \frac{i\epsilon\hbar}{m},$$
$$< (x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k) >=< (z_{k+1} - z_k)(y_{k+1} - y_k) >=< (x_{k+1} - x_k)(z_{k+1} - z_k) >= 0,$$
gdzie opuściliśmy indeks S w wyrażeniach $\langle \ldots \rangle_S$.

2. Wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:
$$< \chi | m \frac{1}{\epsilon} \left((x_{k+1} - x_k) x_k - x_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \right) | \psi >,$$
gdzie
$$\langle \chi \,| F |\, \psi \rangle_S = \iint dx_1 dx_2\, \chi^*(x_2) \left[\int_{x_1}^{x_2} [\mathcal{D}(x(t)]\; F[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \right] \psi(x_1).$$
Zadanie wykonać rozważając ewolucję czasową funkcji falowej o jeden krok czasowy, podobnie jak w przypadku dowodu, że f. falowa spełnia równanie Schrödingera.

3. Wynik zadania 1 sugeruje, że aby otrzymać energię kinetyczną, należy wyliczyć element macierzowy wyrażenia
$$T = \frac{m}{2} \left\langle \chi \left| \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right)^2 - \frac{i\hbar}{m\epsilon} \right| \psi \right\rangle \tag{1}$$
gdyż
$$\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right)^2$$
daje wynik osobliwy. Posługując się techniką z zadania 2 wykazać, że T jest rzeczywiście energią kinetyczną. Rachunek trzeba wykonać do drugiego rzędu w ϵ.