Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 12
zestaw 10.1.2006

1. *Wyznacznik instantonowy - dokończenie.* Celem tego zadania jest wyliczenie jawnym rachunkiem czynnika
$$\tilde{K} = \frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)},$$
gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

   WSKAZÓWKA:

   - Na poprzednich ćwiczeniach pokazaliśmy, że część $\tilde{K}$ od widma ciągłego ma postać :
   $$\tilde{K}_{cont} = \frac{\prod \tilde{\lambda}_n}{\prod \lambda_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \tilde{k}_n^2}{1 + k_n^2} = \exp\left(\sum_n \ln \frac{1 + \tilde{k}_n^2}{1 + k_n^2}\right) \approx \exp\left(\sum_n \frac{2k_n(\tilde{k}_n - k_n)}{1 + k_n^2}\right).$$
   - Wyrażenie to trzeba teraz „uciąglić”:
   $$\ldots = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dk \frac{2\delta_k\, k}{1 + k^2}\right) = \frac{1}{9}.$$
   Ostatnią równość otrzymuje się całkując przez części i wykorzystując podany wyżej wzór na fazę δ_k. Pełny wynik otrzymuje się po domnożeniu przez niezerową wartość własną widma dyskretnego.
   - Proszę otrzymany wynik porównać z ogólnym wynikiem wyprowadzonym na wykładzie.

2. W podręczniku Feynmana-Hibbsa jest wyprowadzona tożsamość:
$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x(s)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x(s)} \right\rangle_S,$$
która w wersji dyskretnej ma postać
$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x_k} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x_k} \right\rangle_S,$$
gdzie
$$\langle F \rangle_S = \int [\mathcal{D}(x(t)]\ F[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}.$$

Korzystając z tej tożsamości wykazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:

$$< (x_{k+1} - x_k)^2 >=< (y_{k+1} - y_k)^2 >=< (z_{k+1} - z_k)^2 >= \frac{i\epsilon\hbar}{m},$$

$$< (x_{k+1}-x_k)(y_{k+1}-y_k) >=< (z_{k+1}-z_k)(y_{k+1}-y_k) >=< (x_{k+1}-x_k)(z_{k+1}-z_k) >= 0,$$

gdzie opuściliśmy indeks S w wyrażeniach $\langle \ldots \rangle_S$.

3. Wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:

$$< \chi | m \frac{1}{\epsilon} \left((x_{k+1} - x_k) x_k - x_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \right) | \psi >,$$

gdzie

$$\langle \chi \, | F | \, \psi \rangle_S = \iint dx_1 dx_2 \, \chi^*(x_2) \left[\int_{x_1}^{x_2} [\mathcal{D}(x(t)] \; F[x(t)] \, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \right] \psi(x_1).$$