Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 11

zestaw 20.12.2005

1. *Wyznacznik instantonowy.* Celem tego zadania jest wyliczenie jawnym rachunkiem czynnika

$$\tilde{K} = \frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)},$$

gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

WSKAZÓWKA:

- Na poprzednich ćwiczeniach przekształciliśmy równanie

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau)$$

do równania hipergeometrycznego wprowadzając Ansatz

$$y_n(\tau) = e^{\alpha\tau} w_n(\tau),$$

gdzie

$$\alpha = \pm\sqrt{-E_n}, \qquad E_n = \lambda_n - 1.$$

Rozwiązanie ma postać

$$y_n(\tau) = \mathcal{N}\left(3\tanh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) - 6\alpha\tanh\left(\frac{\tau}{2}\right) + \left(4\alpha^2 - 1\right)\right)e^{\alpha\tau}.$$

- Aby znaleźć przyczynek od spektrum ciągłego należy najpierw pokazać, że nie zachodzi odbicie przy przejściu nad tym potencjałem. Własność tę wykorzystamy następnie do wyliczenia wszystkich wartości własnych. W tym celu proszę zbadać asymptotykę dla 2 typów rozwiązań $\alpha = ik$ i $\alpha = -ik$, w granicy $\tau \to \infty$ oraz dla $\tau \to -\infty$.

- Jeżeli nie zachodzi odbicie, to funkcja falowa $y_k(\tau)$ o asymptotyce $e^{ik\tau}$ dla $\tau \to \infty$ ma w granicy $\tau \to -\infty$ asymptotykę $\mathrm{e}^{ik\tau + i\delta_k}$, gdzie δ_k jest przesunięciem fazowym. Pokazać, że:

$$\mathrm{e}^{i\delta_k} = \frac{1+ik}{1-ik}\frac{1+2ik}{1-2ik}.$$

Identyczny argument stosuje się dla funkcji o asymptotyce $\mathrm{e}^{-ik\tau}$.

- Podobnie jak w przypadku oscylatora pełne rozwiązanie na funkcję falową widma ciągłego w pudle $-T/2 < \tau < T/2$ ma postać

$$y_n(\tau) = Ay_{\alpha=ik}(\tau) + By_{\alpha=-ik}(\tau)$$

a warunek kwantyzacji wyliczamy z warunków brzegowych używając asymptotycznych postaci funkcji $y_{\alpha=\pm ik}(\tau)$ w punktach $\pm T/2$. Z warunku znikania funkcji falowej na brzegach przedziału dostajemy, że:

$$Tk - \delta_k = \pi\, n.$$

Oznaczmy rozwiązania tego równania przez $\tilde{k}_n$. Podobnie można pokazać, że dla oscylatora harmonicznego $k_n = \pi n/T$. Stąd część $\tilde{K}$ od widma ciągłego ma postać :

$$\tilde{K}_{cont} = \frac{\prod \tilde{\lambda}_n}{\prod \lambda_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+\tilde{k}_n^2}{1+k_n^2} = \exp\left(\sum_n \ln \frac{1+\tilde{k}_n^2}{1+k_n^2}\right) \approx \exp\left(\sum_n \frac{2k_n(\tilde{k}_n - k_n)}{1+k_n^2}\right).$$

- Wyrażenie to trzeba teraz „uciąglić”:

$$\ldots = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dk \frac{2\delta_k\, k}{1+k^2}\right) = \frac{1}{9}.$$

  Ostatnią równość otrzymuje się całkując przez części i wykorzystując podany wyżej wzór na fazę δ_k. Pełny wynik otrzymuje się po domnożeniu przez niezerową wartość własną widma dyskretnego.

- Proszę otrzymany wynik porównać z ogólnym wynikiem wyprowadzonym na wykładzie.