Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 10

zestaw 16.12.2005

(wyjątkowo zamiast wykładu)

1. Dokończyć zadanie z poprzedniego zestawu.

   Rozważyć ruch euklidesowy (w odwróconym potencjale) o zadanej energii E, prowadzący $x_1 \to x_2$ ($x_1 < x_2$) w czasie T w potencjale $V(x) = \kappa(x^2 - a^2)^2$. Dla ruchów bez zawracania jest oczywiste, że jeśli $T \to \infty$, to $x_1 \to -a$, $x_2 \to a$ i $E \to 0$. Wykazać, że w tej granicy

   $$E = -8a^2 e^{-T}.$$

   WSKAZÓWKA.

   Skorzystać ze znanego wzoru na T. Osobliwą całkę rozbić na część skończoną i rozbieżną w granicy $E = 0$ odejmując i dodając wyrażenie $((x-a)^2 + 2E)^{-1/2}$. W części skończonej można od razu położyć $E = 0$, a część rozbieżną trzeba policzyć dokładnie.

2. Dla potencjału $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$ wyliczyć klasyczną trajektorię odpowiadającą jednemu instantonowi (antyinstantonowi). Wyliczyć działanie klasyczne odpowiadające jednemu instantonowi. Przy wyliczaniu działania warto skorzystać z faktu, że ruch ma całkowitą energię równą zeru. Jak wygląda propagator K dla takiego ruchu?

3. *Wyznacznik instantonowy.* Celem tego zadania jest wyliczenie jawnym rachunkiem czynnika

   $$\tilde{K} = \frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)},$$

   gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

   WSKAZÓWKA:

   - Proszę najpierw znaleźć trajektorię klasyczną dla ruchu o zerowej energii od $-a$ do a w odwróconym potencjale $-V(x)$. Proszę wyliczyć działanie klasyczne.
   - Proszę pokazać, że równanie na wartości własne

     $$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau). \tag{1}$$

     odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979).

- Proszę znaleźć spektrum stanów związanych dla tego równania. Warto postąpić nieco inaczej niż w podręczniku Landaua i Lifszica, przyjmując

$$y_n(\tau) = e^{\alpha\tau} w_n(\tau),$$

gdzie współczynnik α należy wyliczyć przez podstawienie do równania (1). Następnie opłaca się wprowadzić zmienną $z = \tanh(\tau/2)$, a następnie $u = (1+z)/2$. W ten sposób równanie (1) można sprowadzić do równania hipergeometrycznego, którego rozwiązanie jest wielomianem.

- Przyczynek od spektrum ciągłego wyliczymy na następnych ćwiczeniach.
- Literatura: S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1988), Section 7, Appendix 1.

  A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, V.A. Novikov and M.A. Shifman, *ABC of Instantons*, Sov. Phys. Usp. **24**, 195 (1982) [Usp. Fiz. Nauk **136**, 553 (1982)].

  T. Schafer and E.V. Shuryak, *Instantons in QCD*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323 [arXiv:hep-ph/9610451].