Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 9

zestaw 13.12.2005

1. Wychodząc z równania Schrödingera dla propagatora K:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x,x_0;t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]K(x,x_0;t),$$

gdzie K spełnia warunek $K(x,x_0;t\to 0)=\delta(x-x_0)$, wyprowadzić formułę Van Vleck'a:

$$F(T)=\left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}\right)^{1/2}.$$

Wskazówka: Wstawić do równania Schrödingera:

$$K=\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\rm cl}+\ln F+\dots\right)$$

i pogrupować wyrazy przy potęgach $\hbar$. W rzędzie zerowym dostaje się równanie Hamiltona-Jacobiego na działanie klasyczne:

$$\partial_t S+\frac{1}{2m}(\partial_x S)^2+V(x)=0,$$

a w pierwszym rzędzie równanie:

$$\partial_t(\ln F)+\frac{1}{2m}\partial_x^2 S+\frac{1}{m}\partial_x S\partial_x(\ln F)=0.$$

Równanie to należy rozwiązać ze względu na $\ln F$. Można to zrobić zauważając, że różniczkując równanie Hamiltona-Jacobiego po x i po x_0 otrzymuje się równanie identyczne z równaniem rzędu $\hbar$, w którym $\ln F$ zastąpiono przez $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}$. Współczynnik proporcjonalności można wyznaczyć z warunku unormowania propagatora w granicy $t\to 0$.

2. Rozpatrzyć ruch o zadanej energii E w potencjale $V(x)$. Wykazać, że dla ruchu od x_1 do x_2 w czasie T zachodzi:

$$\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{1}{2\sqrt{E-V(x_1)}\sqrt{E-V(x_2)}}\frac{\partial E}{\partial T}.$$

3. Rozważyć ruch euklidesowy (w odwróconym potencjale) o zadanej energii E, prowadzący $x_1\to x_2$ ($x_1<x_2$) w czasie T w potencjale $V(x)=\kappa(x^2-a^2)^2$. Dla ruchów bez

zawracania jest oczywiste, że jeśli $T \to \infty$, to $x_1 \to -a$, $x_2 \to a$ i $E \to 0$. Wykazać, że w tej granicy

$$E = -8a^2 e^{-T}.$$

WSKAZÓWKA.

Skorzystać ze znanego wzoru na T. Osobliwą całkę rozbić na część skończoną i rozbieżną w granicy $E = 0$ odejmując i dodając wyrażenie $((x-a)^2 + 2E)^{-1/2}$. W części skończonej można od razu położyć $E = 0$, a część rozbieżną trzeba policzyć dokładnie.

4. Dla potencjału $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$ wyliczyć klasyczną trajektorię odpowiadającą jednemu instantonowi (antyinstantonowi). Wyliczyć działanie klasyczne odpowiadające jednemu instantonowi. Przy wyliczaniu działania warto skorzystać z faktu, że ruch ma całkowitąa energię równą zeru. Jak wygląda propagator K dla takiego ruchu?