Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 8

zestaw 6.12.2005

1. Cząstka o masie m i ładunku e porusza się w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z. Funkcja Lagrange'a dla tego przypadku ma postać (dlaczego?):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

   Wyliczyć propagator dla ruchu od punktu $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ do punktu $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ w czasie T.

   Wsakzówka: Wygodnie jest wprowadzić zmienne $x'(t)$ i $y'(t)$, które odpowiadają przejściu do układu obracającego się ze stałą prędkością kątową α. Należy tak dobrać α aby w tym nowym układzie funkcja Lagrange'e rozseparowała się na trzy niezależne funkcje opisujące ruch cząstki swobodnej i dwa oscylatory harmoniczne. Pozwala to na natychmiastowe napisanie propagatora, który następnie trzeba przepisać w zmiennych wyjściowych.

2. Wychodząc z równania Schrödingera dla propagatora K:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x, x_0; t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]K(x, x_0; t),$$

   gdzie K spełnia warunek $K(x, x_0; t \to 0) = \delta(x - x_0)$, wyprowadzić formułę Van Vleck'a:

$$F(T) = \left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}\right)^{1/2}.$$

   Wskazówka: Wstawić do równania Schrödingera:

$$K = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{cl}} + \ln F + \ldots\right)$$

   i pogrupować wyrazy przy potęgach $\hbar$. W rzędzie zerowym dostaje się równanie Hamiltona-Jacobiego na działanie klasyczne:

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 + V(x) = 0,$$

   a w pierwszym rzędzie równanie:

$$\partial_t(\ln F) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 S + \frac{1}{m}\partial_x S \partial_x(\ln F) = 0.$$

   Równanie to należy rozwiązać ze względu na $\ln F$. Można to zrobić zauważając, że różniczkując równanie Hamiltona-Jacobiego po x i po x_0 otrzymuje się równanie identyczne z równaniem rzędu $\hbar$, w którym $\ln F$ zastąpiono przez $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}$. Współczynnik proporcjonalności można wyznaczyć z warunku unormowania propagatora w granicy $t \to 0$.

3. Dla propagatora cząstki w polu magnetycznym z zadania 1 sprawdzić uogólniony wzór Van Vleck'a wyliczając

$$F = \det\left(-\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\vec{a}\partial\vec{b}}\right),$$

gdzie F jest czynnikiem normalizującym propagator ($K = Fe^{i\cdots}$).