Mechanika Kwantowa dla doktorantów - 4

zestaw 8.11.2005

1. Przedyskutować osobliwości pojawiające się w tarjektoriii klasycznej i w działaniu dla oscylatora harmonicznego.

2. Wyliczyć propagator K dla swobodnego oscylatora harmonicznego. Skorzystać z podręcznika Feynmana Hibbsa 3-6. W tym celu należy oprócz działania klasycznego z poprzedniego zadania wyliczyć dodatkowo czynnik mnożący eksponentę. Rozważyć ruch $-T/2 < t < T/2$ ($T \to \infty$) wokół trajektorii klasycznej $x(t) = x_{cl}(t) + y(t)$ i korzystając z warunku stacjonarności działania wykazać, że pojawia się tylko wkład kwadratowy w y. Całkując przez części po czasie dostajemy

$$S[x(t)] = S[x_{cl}(t)] + \alpha \int dt\, y(t)D(t)y(t),$$

gdzie

$$D(t) = -\frac{d^2}{dt^2} + V''[x_{cl}(t)].$$

Rozkładając $y(t) = \sum\limits_n c_n y_n(t)$ na funkcje własne operatora $D(t)$ możemy wykonać całkę po trajektoriach. W tym celu należy zauważyć, że $\int D[x(t)] \cdots = \int D[y(t)] \cdots = \mathcal{N} \int \prod\limits_n dc_n$. Stałą normalizacyjną ustalimy później.

Spektrum D dostajemy zmykając układ w "pudle":

$$\begin{aligned} D(t)y_n(t) &= \lambda_n y_n(t), \\ y_n(\pm\frac{T}{2}) &= 0. \end{aligned}$$

Po znalezieniu λ_n należy z iloczynu $\prod_n \lambda_n$ wyodrębnić część zależną od ω (częstość oscylatora) i część niezależną od ω. Część zależna od ω daje się jawnie wymnożyć, a część niezależna (razy $\mathcal{N}$) jest pewną stałą, którą można odczytać z porównania z propagatorem cząstki swobodnej w granicy $\omega \to 0$.

3. Porównując ogólny wzór na propagator oscylatora harmonicznego

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2)\psi_n^*(x_1) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t_2 - t_1)\right)$$

z wyprowadzonym wcześniej jawnym wzorem na K znaleźć pierwsze dwie funkcje własne oscylatora $\psi_{1,2}$.

4. Wyliczyć propagator dla oscylatora wymuszonego stałą siłą F. W tym celu wystarczy wyliczyć tylko S_{cl} (dlaczego?). Zbadać granicę $\omega \to \infty$.