# Mechanika Kwantowa dla doktorantów
zestaw 1 i 2 – 14 i 18.10.2005

Zadanie 1 na 14.10, pozostałe na 18.10.

1. Wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa.

   Udowodnić, że dla dwóch niekomutujących operatorów $A$ i $B$ zachodzi

$$e^A \, e^B = e^C, \tag{1}$$

gdzie

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left\{[A,[A,B]] - [B,[A,B]]\right\} - \frac{1}{24}[A,[B,[A,B]]] + ...$$

W tym celu rozpatrzyć operator $C(t)$ zdefiniowany jako

$$e^{C(t)} = e^A e^{tB}$$

i wyprowdzić równanie różniczkowe jakie spełnia $C(t)$.

W tym celu udowodnić wzór na pochodną eksponenty z operatora $C(t)$:

$$\frac{d}{dt}e^{C(t)} = \int_0^1 d\tau \, e^{\tau C(t)} \dot{C}(t) \, e^{(1-\tau)C(t)} = \int_0^1 d\tau \, e^{(1-\tau)C(t)} \dot{C}(t) \, e^{\tau C(t)}. \tag{2}$$

Następnie zdefiniować operator $\Delta_X$, gdzie $X$ jest pewnym operatorem a działanie $\Delta_X$ na dany operator $Y$ dane jest jako:

$$\Delta_X \, Y = [X, Y]. \tag{3}$$

Jest to wygodny zapis komutatora, gdyż można łatwo (formalnie) zapisać operator odwrotny. Proszę pokazać:

$$e^A \, B \, e^{-A} = e^{\Delta_A} B = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \ldots . \tag{4}$$

W tym celu należy zdefiniować

$$B(\tau) = e^{\tau A} \, B \, e^{-\tau A}, \text{ with } B(0) = B \tag{5}$$

napisać równanie różniczkowe na $B$ i rozwiązać je.

Korzystając z własności (4) pokazać, że:

$$\dot{C}(t) = \frac{\Delta_{C(t)}}{1 - e^{-\Delta_{C(t)}}} B = \frac{e^{\Delta_{C(t)}} \, \Delta_{C(t)}}{e^{\Delta_{C(t)}} - 1} B. \tag{6}$$

Aby scałkować ten wzór po $t$ należy dokonać rozwinięcia

$$\dot{C}(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)} (z-1)^n\right] B \ ,$$

gdzie

$$z = e^{\Delta_A} e^{t\Delta_B}$$

i całkować wyraz po wyrazie.

Wyprowadzenie to można znaleźć w dodatku D podręcznika J.M. Normanda "Rotations in Quantum Mechanics".

2. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem

$$\psi(x_2,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2,t_2;x_1,t_1)\psi(x_1,t_1)\, dx_1,$$

gdzie $K$ jest dane jako całka po trajektoriach, spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2 = t_1 + \epsilon$, gdzie $\epsilon$ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1 = x_2 - \eta$. Przedyskutować związek między $\eta$ a $\epsilon$ i przeprowadzić rozwinięcie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1).

3. Udowodnić, że

$$e^{H_0+V} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \prod_{i=1}^{n+1} d\alpha_i\, \delta(1 - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k) e^{\alpha_1 H_0} V e^{\alpha_2 H_0} V \ldots V e^{\alpha_{n+1} H_0}\ . \tag{7}$$

Dowód przeprowadza się wprowadzając „na chwilę" parametr $t$: $H_0 + tV$ i stosując rozwinięcie Taylora wokół $t = 1$. Można też skorzystać z wyprowadzonego już wzoru na $de^{C(t)}/dt$.