Algebra z geometrią - 10

grupa 2.b
kurs mały
24.05.2005.

1. Dla operatora, którego macierz w bazie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ma postać
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
znaleźć wartości własne i wektory własne. Znaleźć ortogonalną macierz O, taką że $OAO^T = B$, gdzie macierz B jest diagonalna, a na diagonalnej ma znalezione wcześniej wartości własne.

2. Dane są dwa układy wektorów w przestrzeni $\mathbf{R}^3$:
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
Dowieść, że są one bazami w $\mathbf{R}^3$. Znaleźć macierz C przejścia między tymi bazami zdefiniowaną jako:
$$\vec{f}_i = \sum_{k=1}^{3} \vec{u}_k \, C_{ki}.$$
Wskazówka: Warto zapisać wektory $\vec{f}_i$ i $\vec{u}_i$ w bazie $\vec{e}_i$ przy pomocy macierzy F i U takich, że
$$\vec{u}_i = U \, \vec{e}_i, \ \vec{f}_i = F \vec{e}_i \, .$$
Następnie należy dowieść, że
$$C = U^{-1} F.$$

3. Dane są trzy wektory
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Wykazać, że stanowią one bazę. Przekształcić ją w bazę ortonormalną, stosując metodę Grama-Schmidta.

4. Znaleźć wartości własne i ortonormalny układ wektorów własnych macierzy
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Michał Praszałowicz
http://th-www.if.uj.edu.pl/~michal/