Algebra z geometrią - 3

kurs mały

22.03.2005.

1. Udowodnić
$$\left(\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\right)^n = \frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$$

2. Obliczyć
$$\sqrt{-i},\ \sqrt[3]{1+i},\ \sqrt[3]{\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}},\ \sqrt[4]{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

3. Znaleźć na płaszczyźnie zespolonego z (o osiach Rez i Imz):
   - wierzchołek trójkąta równobocznego zbudowanego na odcinku (z_1, z_2).
   - środek ciężkości trójkąta (z_1, z_2, z_3).

4. Znaleźć na płaszczyźniezespolonej miejsce geometryczne punktów z spełniających warunki
$$\begin{aligned} z &= -\bar{z}, \\ |z-z_1| + |z-z_2| &= 2r, \\ |z-z_1| &= \lambda\,|z-z_2|\,, \end{aligned}$$
   gdzie $z_{1,2}$ są zadanymi punktami, $a > 0$, $\lambda > 0$.

5. Dowieść, że punkty $z_{1,2,3}$ leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste $\alpha_{1,2,3}$ nie wszystkie równe zeru, takie że:
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0.$$

Michał Praszałowicz
http://th-www.if.uj.edu.pl/~michal/