

## Neutrino Majorany

Przypomnienie: swobodne rozwiązania r. Diraka, rozkład w bazie helicity:

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle, \quad \text{gdzie} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow |+\rangle \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow |-\rangle$$

Tak jest dla cząstek poruszających się wzdłuż osi  $z$ . Dla dowolnej osi, trzeba dokonać obrotu:

$$|+\rangle = \begin{bmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{bmatrix} -e^{-i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ \cos \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

Zbadajmy

$$i\sigma^2 |+\rangle^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ e^{-i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -\cos \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} = -|-\rangle$$

$$i\sigma^2 |-\rangle^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ \cos \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix} = |+\rangle$$

czyli

$$\boxed{i\sigma^2 |+\rangle^* = -|-\rangle, \quad i\sigma^2 |-\rangle^* = |+\rangle}$$

Mamy

$$\begin{aligned} \psi_L = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \\ & \left[ \left( b_{\vec{p}+} e^{-\theta/2} |+\rangle + b_{\vec{p}-} e^{+\theta/2} |-\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right. \\ & \left. + \left( d_{\vec{p}+}^* e^{+\theta/2} |-\rangle - d_{\vec{p}-}^* e^{-\theta/2} |+\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_R = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \\ & \left[ \left( b_{\vec{p}+} e^{+\theta/2} |+\rangle + b_{\vec{p}-} e^{-\theta/2} |-\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right. \\ & \left. - \left( d_{\vec{p}+}^* e^{-\theta/2} |-\rangle - d_{\vec{p}-}^* e^{+\theta/2} |+\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right] \end{aligned}$$

Dla każdego  $\vec{p}$  są **cztery** niezależne współczynniki **zespólone** (*spinory Diraka*):

$$\underbrace{b_{\vec{p}+}, b_{\vec{p}-}}_{\text{cząstki}}, \underbrace{d_{\vec{p}+}^*, d_{\vec{p}-}^*}_{\text{antycząstki}}$$

Można narzucić warunek:

$$d_{\vec{p}+} = b_{\vec{p}+}, \quad d_{\vec{p}-} = b_{\vec{p}-}$$

są to wtedy *spinory Majorany*: cząstki i antycząstki są identyczne:

$$\begin{aligned} \nu_L = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \\ & \left[ \left( b_{\vec{p}+} e^{-\theta/2} |+\rangle + b_{\vec{p}-} e^{+\theta/2} |-\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right. \\ & \left. + \left( b_{\vec{p}+}^* e^{+\theta/2} |-\rangle - b_{\vec{p}-}^* e^{-\theta/2} |+\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_R = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \\ & \left[ \left( b_{\vec{p}+} e^{+\theta/2} |+\rangle + b_{\vec{p}-} e^{-\theta/2} |-\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right. \\ & \left. - \left( b_{\vec{p}+}^* e^{-\theta/2} |-\rangle - b_{\vec{p}-}^* e^{+\theta/2} |+\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right] \end{aligned}$$

Pola  $\nu_L$  i  $\nu_R$  nie są niezależne. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}
 i\sigma_2\nu_L^* &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \\
 &\quad \left[ (b_{\vec{p}+}^* e^{-\theta/2} \overbrace{i\sigma_2 |+\rangle}^{-|-\rangle})^* + b_{\vec{p}-}^* e^{+\theta/2} \overbrace{i\sigma_2 |-\rangle}^{|\+\rangle})^* e^{+i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right) \\
 &\quad + (b_{\vec{p}+} e^{+\theta/2} \underbrace{i\sigma_2 |-\rangle}_{|\+\rangle})^* - b_{\vec{p}-} e^{-\theta/2} \underbrace{i\sigma_2 |+\rangle}_{-|-\rangle})^* e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} ] \\
 &= \nu_R
 \end{aligned}$$

Analogicznie

$$i\sigma^2\nu_R^* = -\nu_L$$

Mamy więc

$$\nu_R = i\sigma_2\nu_L^*, \quad \nu_L = -i\sigma^2\nu_R^*.$$

Pamiętamy definicję sprzężenia ładunkowego

$$\psi_L^c = -i\sigma^2\psi_R^*, \quad \psi_R^c = +i\sigma^2\psi_L^*$$

co dla neutrin Majorany daje

$$\nu_L^c = -i\sigma^2\nu_R^* = \nu_L$$

Sprzężenie ładunkowe neutrina Majorany jest identyczne z polem wyjściowym. Nie ma odróżnialnego antyneutrino (liczba leptonowa nie jest zachowana). Dla cząstki o zadanym pędzie mamy dwa stany helicity  $+$  i  $-$ , podobnie jak foton (choć neutrino Majorany może mieć masę).

# Gęstość Lagrange'a dla cząstek Majorany

Z wykładu 3

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$$

Dla cząstek Majorany

$$\psi_L = \nu_L \stackrel{\text{ozn}}{=} \nu, \quad \nu_R = i\sigma^2 \nu^*$$

w dalszym ciągu opuszczamy indeks  $L$ . Ponieważ  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  opisuje *dwie* różne cząstki, konstruując lagrangian dla cząstek Majorany musimy podzielić przez 2

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \left[ i\nu^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu + i (i\sigma^2 \nu^*)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu (i\sigma^2 \nu^*) - m(\nu^\dagger (i\sigma^2 \nu^*) + (i\sigma^2 \nu^*)^\dagger \nu) \right]$$

Można pokazać, że drugi człon jest równy pierwszemu:

$$\mathcal{L}_M = i\nu^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu + \frac{m}{2} [\nu^T (i\sigma^2) \nu - \nu^\dagger (i\sigma^2) \nu^*]$$

---

Dowód równoważności członu 1 i 2.

$$(i\sigma^2\nu^*)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu (i\sigma^2\nu^*) = \nu^T \sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 \partial_\mu \nu^* = \dots$$

gdzie  $\sigma^2$  jest hermitowskie a  $i^\dagger = -i$ . Dalej

$$\begin{aligned}\sigma^2 \sigma^0 \sigma^2 &= \sigma^0 = (\tilde{\sigma}^0)^T \\ \sigma^2 \sigma^{1,3} \sigma^2 &= -\sigma^{1,3} = -(\sigma^{1,3})^T = (\tilde{\sigma}^{1,3})^T \\ \sigma^2 \sigma^2 \sigma^2 &= \sigma^2 = -(\sigma^2)^T = (\tilde{\sigma}^2)^T\end{aligned}$$

mamy

$$\dots = -(\partial_\mu \nu^\dagger) \tilde{\sigma}^\mu \nu \rightarrow \nu^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu,$$

gdzie znak minus pochodzący z antykomutacji pól fermionowych został „zjedzony” przez całkowanie przez części.

---

# Mieszanie neutrin Majorany

Ogólny człon masowy

$$\mathcal{L}_{\text{M,mass}} = \frac{1}{2} \left[ m_{\alpha\beta} \nu_{\alpha}^T (i\sigma^2) \nu_{\beta} - m_{\alpha\beta}^{\dagger} \nu_{\alpha}^{\dagger} (i\sigma^2) \nu_{\beta}^* \right]$$

Macierz  $m_{\alpha\beta}$  można wybrać jako symetryczną ( $i\sigma^2$  jest antysymetryczne, ale przestawienie pól fermionowych daje dodatkowy znak  $-$ ). Każdą macierz symetryczną można zdiagonalizować przy pomocy transformacji unitarnej:

$$m = U m^D U^{\dagger}$$

Macierz unitarna  $3 \times 3$  ma 9 rzeczywistych parametrów. Ale trzy fazy można zaabsorbować do definicji pól Majorany, zostaje 6 parametrów rzeczywistych. Pamiętajmy, że dla cząstek Diraka (3 generacje), mieliśmy 4 parametry: 3 kąty i jedną fazę (wykład 11). Czyli dla cząstek Majorany mamy 2 dodatkowe fazy (które jednak nie dają efektów w oscylacjach).



## Jak nadać masy neutrinom w ramach modelu standardowego?

W przypadku neutrin Diraka postępujemy tak samo jak w przypadku kwarków up (wykład 11):

$$L_\alpha = \begin{bmatrix} \nu_{\alpha L} \\ \alpha_L \end{bmatrix}, \quad \alpha_R \quad \text{gdzie} \quad \alpha = e, \mu, \tau.$$

Wówczas

$$(\Phi^T \varepsilon L_\alpha)$$

jest niezmiennikiem SU(2) i

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}^\nu = - \sum_{\alpha, \beta} \left[ (L_\alpha^\dagger \varepsilon \Phi^*) \Lambda_{\alpha\beta}^\nu \nu_{\beta R} + \nu_{\beta R}^\dagger \Lambda_{\beta\alpha}^{\nu\dagger} (\Phi^T \varepsilon L_\alpha) \right]$$

Ponieważ

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} + \dots$$

stałe Yukawy

$$\phi_0 \Lambda_{\alpha\beta}^\nu = m_{\alpha\beta}$$

generują masy.

W przypadku neutrin Majorany mamy tylko dublety SU(2)

$$\mathcal{L}_{\text{M,mass}} = \frac{1}{2} [m_{\alpha\beta} \nu_{\alpha}^T (i\sigma^2) \nu_{\beta} + \text{H.c.}]$$

jest pewna komplikacja. Wyrazy niezmiennicze względem SU(2)

$$\mathcal{L}_{\text{M,Higs}} = \frac{1}{2} [K_{\alpha\beta} (\Phi^T \varepsilon L_{\alpha})^T (i\sigma^2) (\Phi^T \varepsilon L_{\beta}) + \text{H.c.}]$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} (\Phi^T \varepsilon L_{\alpha}) &= -\phi_0 \nu_{\alpha} + \dots \\ m &\sim \phi_0^2 K \end{aligned}$$

Stałe Yukawy mają wymiar  $\text{masa}^{-1}$  (podobnie jak stała Fermiego), co sugeruje teorię efektywną i kłopoty z renormalizowalnością.

## Mechanizm huśtawki

Rozważmy dwa pola neutrinowe:

- 1) lewoskrętne neutrino z MS:  $\nu_L$
- 2) nowe neutrino prawoskrętne:  $r$

Gęstość Lagrange'a:

$$\mathcal{L} = i\nu_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L + ir^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu r + \frac{M}{2} [r^T (i\sigma^2) r - r^\dagger (i\sigma^2) r^*] - \mu (\nu_L^\dagger r + r^\dagger \nu_L).$$

Pomijając oddziaływanie ( $\mu = 0$ ) jest to system dwóch niezależnych pól: lewoskrętnego  $\nu_L$  i prawoskrętnego neutrino Majorany  $r$ . Załóżmy, że  $M \gg p_r$  wtedy w r. ruchu można pominąć człon kinetyczny dla  $r$  (patrz wykład 10 redukcja oddziaływań  $W$  do teorii Fermiego). Pole  $r$  ma dwa stopnie swobody  $r$  i  $r^\dagger$ . Wariując po  $\delta r^\dagger$  mamy

$$-M(i\sigma^2)r^* - \mu\nu_L = 0$$

co daje

$$\begin{aligned} (i\sigma^2)r^* &= -\frac{\mu}{M}\nu_L && \text{mnożymy z lewej przez } -i\sigma^2 \\ r^* &= \frac{\mu}{M}(i\sigma^2)\nu_L && \text{sprzężenie zespolone} \\ r &= \frac{\mu}{M}(i\sigma^2)\nu_L^* \end{aligned}$$

Podstawiamy do członu masowego:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} &= \frac{M}{2} \left[ r^T (i\sigma^2)r - r^\dagger (i\sigma^2)r^* \right] - \mu \left( \nu_L^\dagger r + r^\dagger \nu_L \right) \\ &= \frac{M}{2} \left( \frac{\mu}{M} \right)^2 \left[ \nu_L^\dagger (i\sigma^2)^T (i\sigma^2) (i\sigma^2) \nu_L^* - \nu_L^T (i\sigma^2)^T (i\sigma^2) (i\sigma^2) \nu_L \right] \\ &\quad - \mu \frac{\mu}{M} \left( \nu_L^\dagger (i\sigma^2) \nu_L^* + \nu_L^T (i\sigma^2)^T \nu_L \right) \end{aligned}$$

Ponieważ

$$i\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad (i\sigma^2)^T (i\sigma^2) = 1, \quad (i\sigma^2)^T = -(i\sigma^2)$$

co daje

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{\mu^2}{M} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left[ \nu_L^\dagger (i\sigma^2) \nu_L^* - \nu_L^T (i\sigma^2) \nu_L \right] = \frac{\mu^2}{2M} \left[ \nu_L^T (i\sigma^2) \nu_L - \nu_L^\dagger (i\sigma^2) \nu_L^* \right].$$

Zatem masa neutrina

$$m = \frac{\mu^2}{M}$$

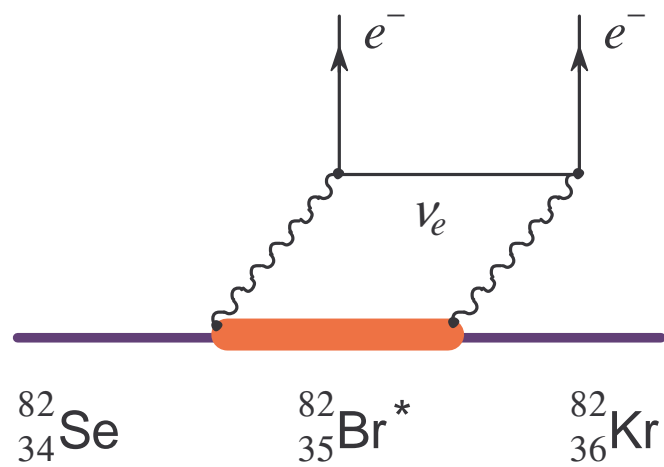
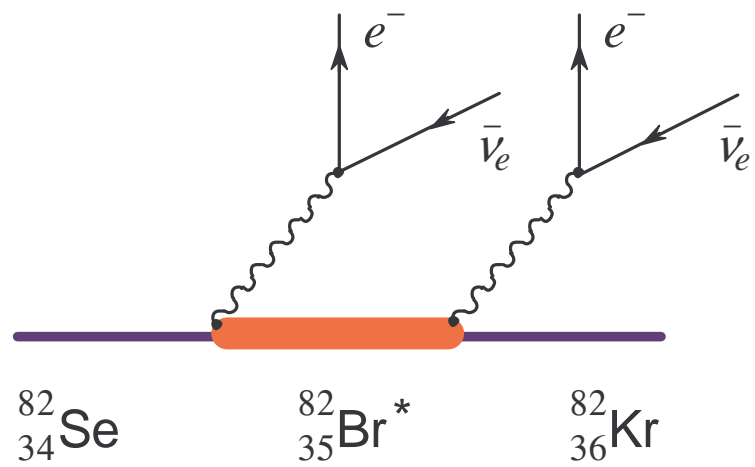
Masę  $\mu$  można wygenerować przez sprzężenie do Higgsa

$$\lambda [(L_\alpha^\dagger \varepsilon \Phi^*) r + \text{H.c.}]$$

ale  $M$  jest spoza modelu standardowego. Gdy  $M \rightarrow \infty$  masy neutrin są małe.

Jak sprawdzić, czy neutrina są cząstkami Majorany?

Podwójny rozpad beta:



Podwójny rozpad beta zachodzi w drugim rzędzie rachunku zaburzeń. Ale bezneutrinowy rozpad jest tłumiony:

wykreowanie neutrina lewoskrętnego:

$$|\nu_L(p)\rangle = \nu_L^\dagger(p) |0\rangle \sim \sqrt{\frac{m}{2E_p}} e^{i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \left( b_{\vec{p}^+}^\dagger e^{-\theta/2} |+\rangle + b_{\vec{p}^-}^\dagger e^{+\theta/2} |-\rangle \right) |0\rangle$$

i następnie zanihilowanie jako prawoskrętnego

$$\nu_R \approx \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \left( b_{\vec{p}^+} e^{+\theta/2} |+\rangle + b_{\vec{p}^-} e^{-\theta/2} |-\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} + \dots$$

stąd

$$\nu_R |\nu_L(p)\rangle \sim \frac{m}{2E_p} \left( e^{+\theta/2} e^{-\theta/2} \langle + | + \rangle + e^{-\theta/2} e^{+\theta/2} \langle - | - \rangle \right) |0\rangle = \frac{m}{E_p}$$

W rozpadzie na dwa neutrina dominuje człon (wykład 4):

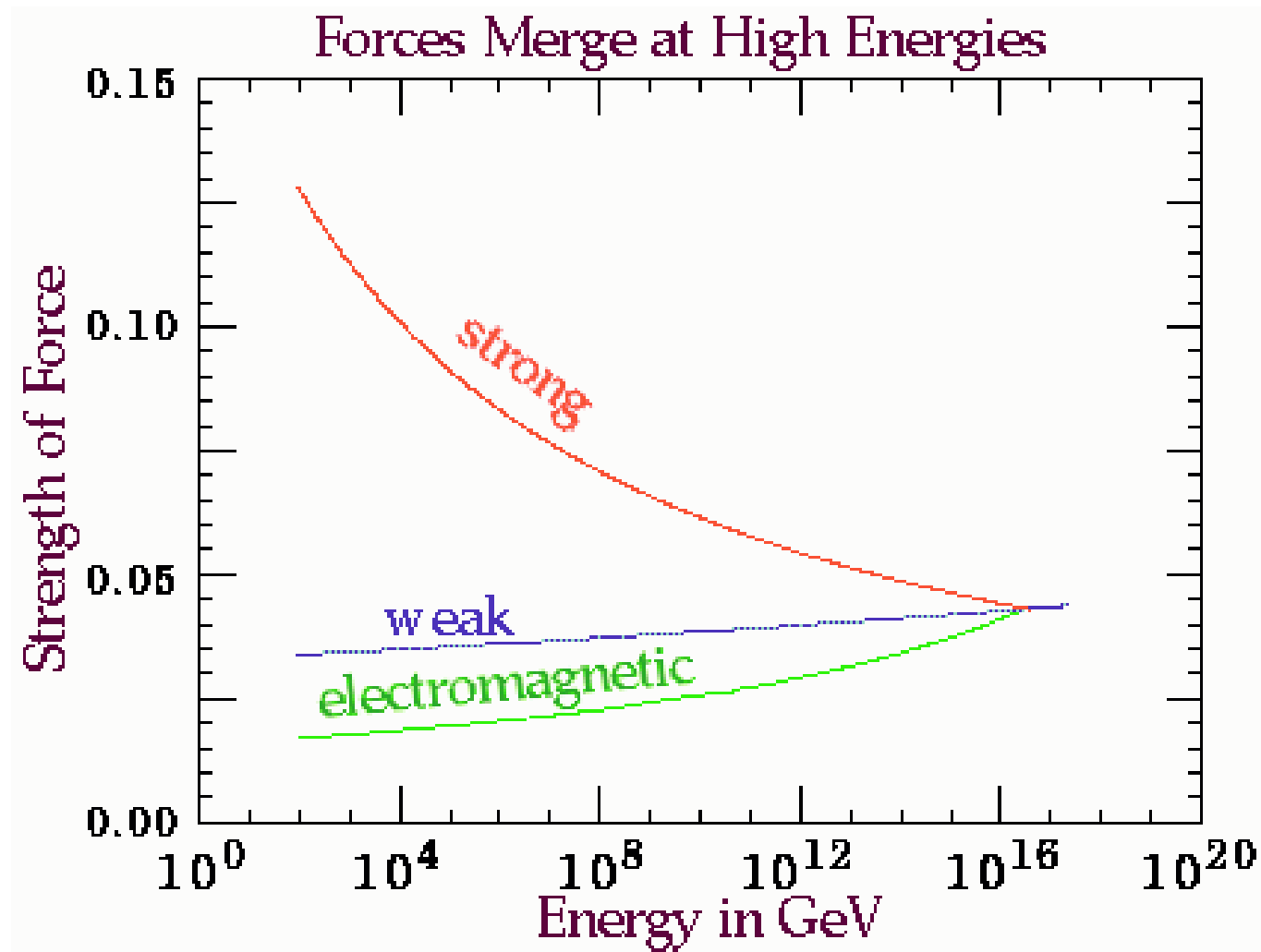
$$\left[ \sqrt{\frac{m}{2E_p}} e^{+\theta/2} \right]^2 = \frac{m}{2E_p} e^\theta \simeq \frac{m}{2E_p} 2 \cosh \theta \simeq 1$$

Typowe czasy połowicznego rozpadu:

$$T_{1/2}^{2\nu} \sim 10^{20} \text{ y}$$

$$T_{1/2}^{0\nu} \sim 10^{25} \text{ y}$$

# Wielka Unifikacja





Unifikacja przy energiach  $10^{15}$  GeV

$$G \xrightarrow{10^{15}} \text{SU}(3) \times \text{SU}_L(2) \times \text{U}(1) \xrightarrow{10^2} \text{SU}(3) \times \text{U}(1)$$

Najprostszy przykład:

$$G = \text{SU}(5)$$

Niestety fermiony są w dość dziwnych reprezentacjach:

$$\begin{aligned} \bar{5} &= [\nu_e, e^-, \bar{d}_r, \bar{d}_g, \bar{d}_b]_L \\ 10 &= \begin{bmatrix} 0 & e^+ & d_r & d_g & d_b \\ -e^+ & 0 & u_r & u_g & u_b \\ -d_r & -u_r & 0 & \bar{u}_g & \bar{u}_b \\ -d_g & -u_g & -\bar{u}_g & 0 & \bar{u}_r \\ -d_b & -u_b & -\bar{u}_b & -\bar{u}_r & 0 \end{bmatrix}_L \end{aligned}$$

Całkowity ładunek  $Q = 0$ .

## Kąt Weinberga

Sprzężenie (wykład 10)  $Z$ :

$$\tilde{\sigma}^\mu \begin{bmatrix} i\partial_\mu - \frac{e}{\sin 2\theta_W} Z_\mu & -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^+ \\ -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^- & i\partial_\mu + eA_\mu + e \cot 2\theta_W Z_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

zapisując

$$e \cot 2\theta_W = \frac{\cos 2\theta_W}{\sin 2\theta_W} = \frac{e}{\sin 2\theta_W} (1 - 2 \sin^2 \theta_W) = \frac{-2e}{\sin 2\theta_W} \times \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W\right)$$

$$-\frac{e}{\sin 2\theta_W} = \frac{-2e}{\sin 2\theta_W} \times \frac{1}{2}$$

Przypisując ładunek oraz słaby izospin  $I_3$

$$\nu_L : I_3 = +\frac{1}{2}, \quad Q = 0$$

$$e_L : I_3 = -\frac{1}{2}, \quad Q = -1$$

sprzężenie do  $Z$

$$g_Z \sim I_3 - Q \sin^2 \theta_W$$

$$g_Z \sim I_3 - Q \sin^2 \theta_W$$

To działa też dla kwarków (wykład 11):

$$g_Z \sim I_3 - Q \sin^2 \theta_W$$

To działa też dla kwarków (wykład 11):

$$\sigma^\mu \left( i\partial_\mu + i\frac{e}{3}A_\mu - \frac{e}{3}\tan\theta_W Z_\mu \right) d_R$$

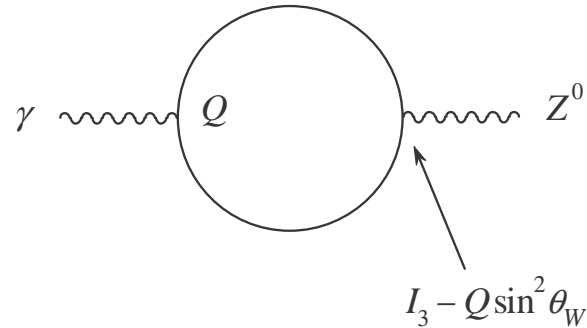
Mamy

$$-\frac{e}{3}\tan\theta_W = -\frac{e\sin\theta_W}{3\cos\theta_W} \frac{2\sin\theta_W\cos\theta_W}{\sin 2\theta_W} = \frac{-2e}{\sin 2\theta_W} \times \frac{1}{3}\sin^2\theta_W$$

Słaby izospin kwarku  $d_R$  jest zero, tak samo jak antykwarku  $\bar{d}_L$ .

## Kąt Weinberga

Ponieważ  $\gamma$  i  $Z^0$  są ortogonalnymi stanami fizycznymi diagram



powinien dawać zero. Dla reprezentacji  $\bar{5}$

$$\sum_{\nu, e, \bar{d}} Q(I_3 - Q \sin^2 \theta_W) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin^2 \theta_W = \frac{\sum_{\nu, e, \bar{d}} Q I_3}{\sum_{\nu, e, \bar{d}} Q^2}$$

Mamy

$$\sum_{\nu, e, \bar{d}} Q I_3 = \frac{1}{2} \text{ (przyczynek tylko od elektronu)}$$

$$\sum_{\nu, e, \bar{d}} Q^2 = 0 + 1 + 3 \frac{1}{9} = \frac{4}{3}$$

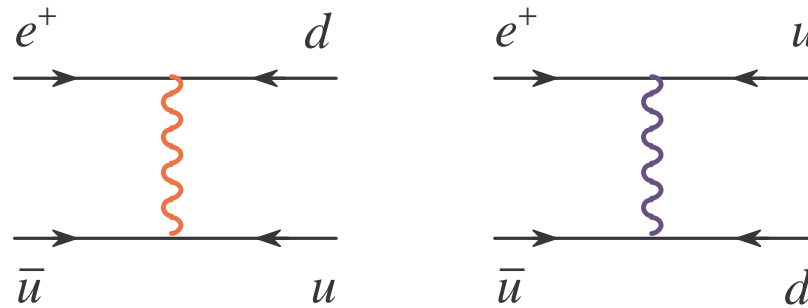
Stąd

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8} = 0.375 \text{ (exp. 0.2315)}$$

To jest przy skali  $10^{15}$  GeV. Ewolucja to obniża.

## Leptokwarki

W teorii  $SU(N)$  jest  $N^2 - 1$  bozonów pośredniczących. Dla  $SU(5)$  mamy 24 takie bozony. Są to: 8 gluonów, 3 bozony  $W^\pm$  i  $Z^0$  oraz  $\gamma$  (razem 12) i 12 leptokwarków:



które są odpowiedzialne za rozpad protonu (muszą być ciężkie  $\sim 10^{15}$  GeV).

Rozważa się wiele innych grup (Wikipedia):

# Georgi-Glashow model –  $SU(5)$

# minimal left-right model –  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R U(1)_{\{B-L\}}$

#  $SO(10)$

# Flipped  $SU(5)$  –  $SU(5) \times U(1)$

# Pati-Salam model –  $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$

# flipped  $SO(10)$  –  $SO(10) \times U(1)$

# Trinification –  $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$

# SU(6)

# E6

# Supersymetria

Symetria zamieniająca

fermion  $\longleftrightarrow$  bozon

