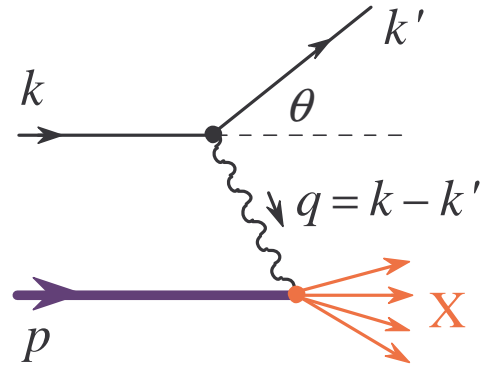


# Rozpraszanie głęboko nieelastyczne (deep inelastic scattering)



Mamy:

$$p = M(1, 0, 0, 0)$$

$$k = \omega(1, 0, 0, 1), \quad k' = \omega'(1, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta), \quad q = k - k'$$

$$W^2 = p_X^2 \quad \text{dla rozpraszania elastycznego } W^2 = M^2 \quad \text{i dodatkowo } \int d^4 p_X$$

$$q \cdot p = (k - k') \cdot p = M(\omega - \omega') = M\nu$$

$$Q^2 = -q^2 = 2k \cdot k' = 2\omega\omega'(1 - \cos \theta) = 4\omega\omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \rightarrow W^2 = (p + q)^2 = M^2 + Q^2 \frac{1-x}{x} \rightarrow x \in (0, 1)$$

# Rozpraszanie głęboko nieelastyczne – model partonów

Definiujemy

$$F_2(x) = \nu W_2 = x \sum_i e_i^2 f_i(x)$$
$$F_1(x) = MW_1 = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x)$$

Mamy pierwsze przewidywanie (relacja Callana-Grossa)

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$

## Kwarki jako partony

$$F_2^{\text{p}}(x)/x = \frac{4}{9} [u_{\text{p}}(x) + \bar{u}_{\text{p}}(x)] + \frac{1}{9} [d_{\text{p}}(x) + \bar{d}_{\text{p}}(x) + s_{\text{p}}(x) + \bar{s}_{\text{p}}(x)] ,$$

$$F_2^{\text{n}}(x)/x = \frac{4}{9} [u_{\text{n}}(x) + \bar{u}_{\text{n}}(x)] + \frac{1}{9} [d_{\text{n}}(x) + \bar{d}_{\text{n}}(x) + s_{\text{n}}(x) + \bar{s}_{\text{n}}(x)] .$$

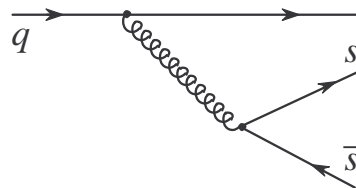
Dodatkowe założenia

$$u_{\text{p}} = d_{\text{n}} = u, \quad d_{\text{p}} = u_{\text{n}} = d, \quad s_{\text{p}} = s_{\text{n}} = s.$$

Neutron i proton nie mają dziwności:

$$\int dx (s(x) - \bar{s}(x)) = 0.$$

Kwarki dziwne produkują się w procesach radiacyjnych:



## Kwarki jako partony – reguły sum

Ładunki:

$$q_p = \int dx \left[ \frac{2}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(s(x) - \bar{s}(x)) \right] = 1$$
$$q_n = \int dx \left[ \frac{2}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(s(x) - \bar{s}(x)) \right] = 0$$

$0 \updownarrow$

Rozwiązania:

$$\int dx (u(x) - \bar{u}(x)) = 2, \quad \int dx (d(x) - \bar{d}(x)) = 1, \quad \int dx (s(x) - \bar{s}(x)) = 0.$$

Kwarki walencyjne i kwarki morza:

$$u = u_v + q_s, \quad d = d_v + q_s, \quad \bar{u} = \bar{d} = \bar{s} = s = q_s$$

co daje

$$\int dx u_v(x) = 2, \quad \int dx d_v(x) = 1$$

Rozkłady kwarków są znormalizowane do ich liczby.

Pęd protonu:

$$\int dx x(u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) = 1 - \varepsilon.$$

Okazuje się, że  $\varepsilon \sim 45\%$ . Co niesie resztę pędu? Gluony.

## Reguła Gottfrieda

$$2F_1^p(x) = \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] ,$$

$$2F_1^n(x) = \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] .$$

Policzmy różnicę

$$\begin{aligned} S_G &= \int dx (F_1^p(x) - F_1^n(x)) = \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{1}{3} [u(x) + \bar{u}(x)] - \frac{1}{3} [d(x) + \bar{d}(x)] \right) \\ &= \frac{1}{6} \int dx [u_v(x) - d_v(x)] + \frac{2}{6} \int dx [q_s(x) - \bar{q}_s(x)] = \frac{1}{6} \simeq 0.17. \end{aligned}$$

Eksperyment: 0.13.

Uniwersalność rozkładów partonowych.

## Reguła Gottfrieda

$$2F_1^p(x) = \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] ,$$

$$2F_1^n(x) = \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] .$$

Policzmy różnicę

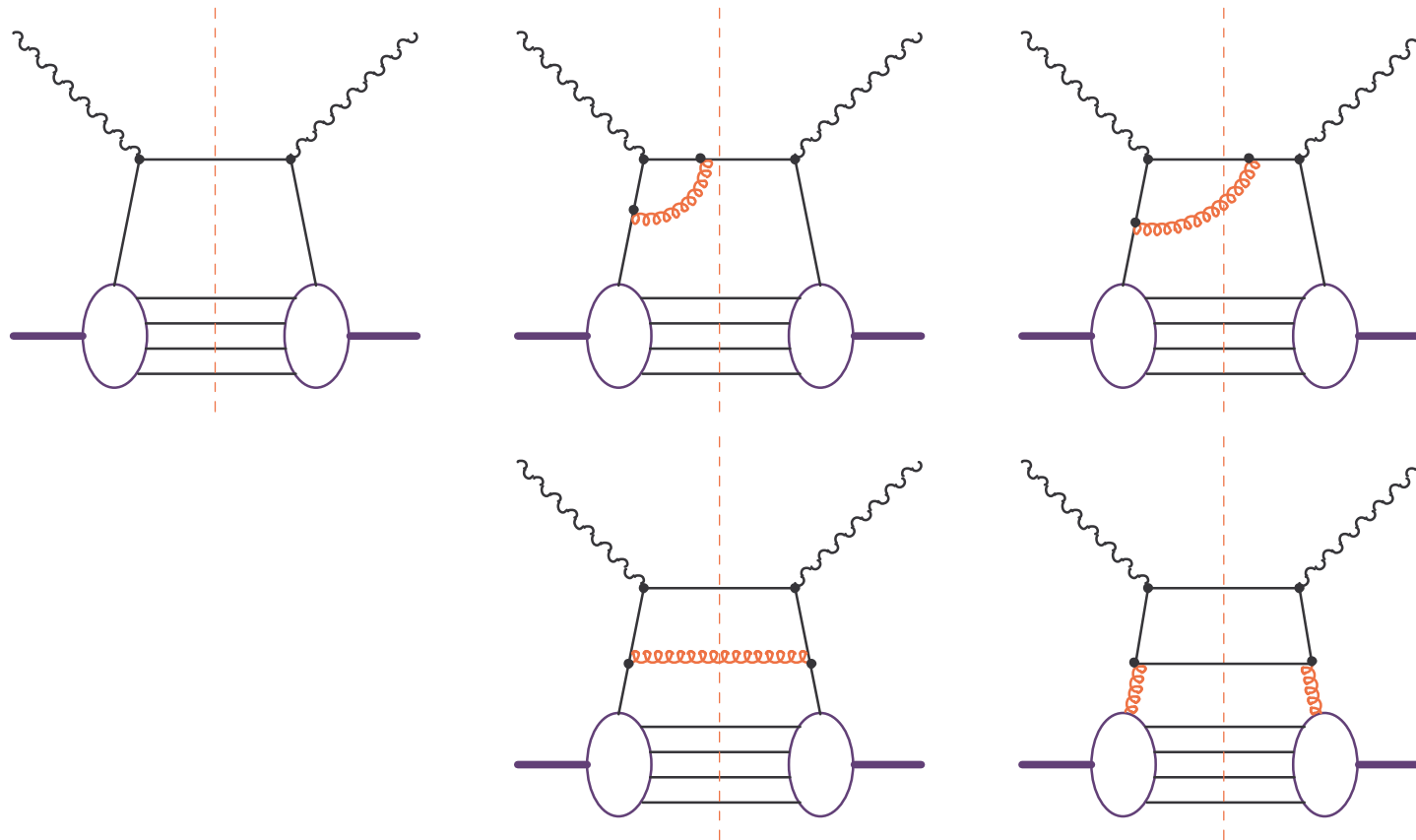
$$\begin{aligned} S_G &= \int dx (F_1^p(x) - F_1^n(x)) = \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{1}{3} [u(x) + \bar{u}(x)] - \frac{1}{3} [d(x) + \bar{d}(x)] \right) \\ &= \frac{1}{6} \int dx \underbrace{[u_v(x) - d_v(x)]}_1 + \frac{2}{6} \int dx \underbrace{[q_s(x) - \bar{q}_s(x)]}_{=0} = \frac{1}{6} \simeq 0.17. \end{aligned}$$

Eksperyment: 0.13.

Uniwersalność rozkładów partonowych.

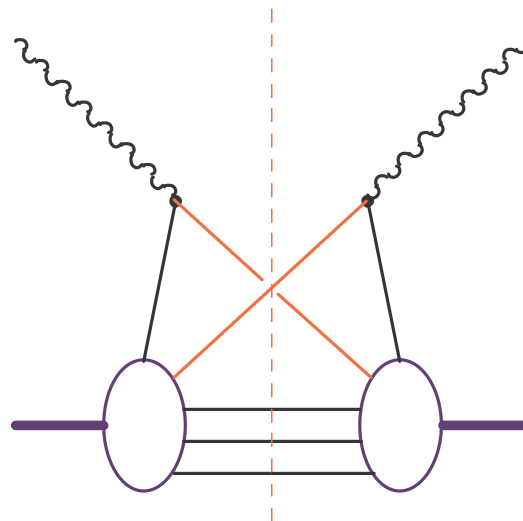
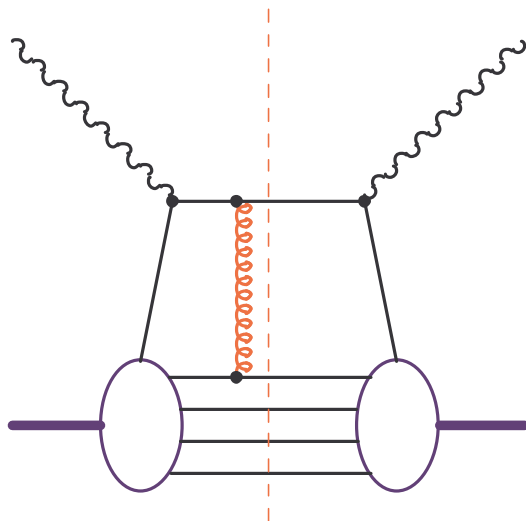
# Ewolucja rozkładów partonowych

Poprawki radjacyjne:



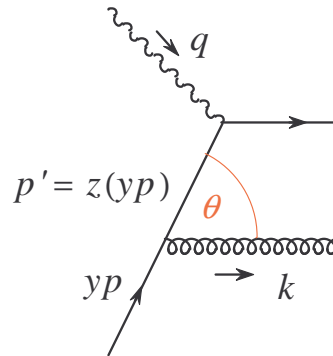


Poprawki których nie bierzemy pod uwagę:



## Ewolucja rozkładów partonowych

Nie ma rozbieżności UV, są podczerwone (IR):



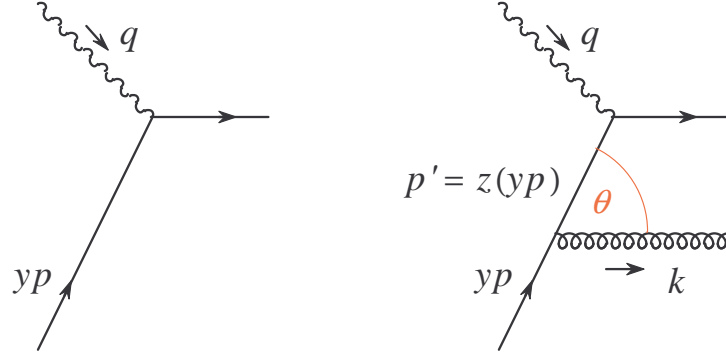
$$yp = E(1, 0, 0, 1) \quad k = \omega(1, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta)$$

$$\frac{1}{p'^2} \frac{1}{(yp - k)^2} = \frac{1}{2ypk} = \frac{1}{2E\omega(1 - \cos \theta)}$$

to musimy wycałkować po  $d^4k \rightarrow d\omega d\cos \theta$ . Są dwa typy rozbieżności:

- podczerwone:  $\omega \rightarrow 0$  (supermiękkie foton)
- kolinearne:  $\theta \rightarrow 0$  (foton kolinearny z kwarkiem)

Podczerwone kasują się, kolinearne pozostają. Można je zamienić na całkę po  $dk_T^2 \rightarrow \ln Q^2/\mu^2$ , gdzie  $\mu^2$  jest arbitralnie wybraną skalą. Zachowanie czteropędu:



$$0 = (zyp + q)^2 = 2zy pq + q^2 = 2M\nu zy - Q^2 \rightarrow zy = \frac{Q^2}{2M\nu} = x$$

Dla diagramów powyżej mamy

$$2F_1(x) = e_q^2 \int_0^1 dy q(y) \delta(y - x)$$

$$2\Delta F_1(x) = e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dy q(y) \int_0^1 dz \delta(z y - x) \left[ P_{qq}(z) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + C(z) \right]$$

Funkcja  $P_{qq}(z)$  jest uniwersalna. Sumując tylko przyczynki logarytmiczne dostajemy

$$\begin{aligned} q(x, Q^2) &= q(x, \mu^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) q(y, \mu^2) \\ &= q(x, \mu^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} P_{qq} \otimes q(\mu^2) \end{aligned}$$

gdzie zdefiniowaliśmy konwolucję:

$$\begin{aligned} P_{qq} \otimes q &= \int_0^1 dz \int_0^1 dy \delta(zy - x) P_{qq}(z) q(y) \\ &= \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) q(y) = \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) q \left( \frac{x}{z} \right) \end{aligned}$$

Rzeczywiście dla  $Q^2 = \mu^2$  wyraz niejednorodny jest prawidłowy.

Różniczkując

$$q(x, Q^2) = q(x, \mu^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} P_{qq} \otimes q(\mu^2)$$

po

$$\frac{d}{d \ln Q^2} = Q^2 \frac{d}{dQ^2}$$

dostajemy **równanie ewolucji**

$$\frac{d}{d \ln Q^2} q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \otimes q(Q^2).$$

## Równanie ewolucji

Pokażemy, że równanie

$$\frac{d}{d \ln Q^2} q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \otimes q(Q^2).$$

sumuje wszystkie rzędy, Całkując (opuszczając zależność od  $x$ ):

$$\int_{\mu^2}^{Q^2} d \ln Q'^2 \frac{d}{d \ln Q'^2} q(Q'^2) = q(Q^2) - q(\mu^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \otimes \int_{\mu^2}^{Q^2} d \ln Q'^2 q(Q'^2)$$

Ostatnia całka daje

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \otimes \int_{\mu^2}^{Q^2} d \ln Q'^2 \left[ q(\mu^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} P_{qq} \otimes q(\mu^2) \right] \\ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} P_{qq} \otimes q(\mu^2) + O(\alpha_s^2 \ln^2 \frac{Q^2}{\mu^2}) \end{aligned}$$

## Równania ewolucji (DGLAP)

Ostatecznie mamy zespół równań (Dokshitzera-Lipatowa) Altarelliego-Parisiego:

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} q_i(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} [P_{qq} \otimes q_i(Q^2) + P_{qG} \otimes G(Q^2)]$$

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} G(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[ P_{Gq} \otimes \sum_i q_i(Q^2) + P_{GG} \otimes G(Q^2) \right]$$

(argument  $\alpha_s(Q^2)$  jest  $Q^2$ ). Tu  $i$  numeruje różne flavory: up, down, strange i antykwarki.

## Prawdopodobieństwa Altarelli-Parisi

$$P_{qq}(z) = C_F \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right)_+$$

Dystrybucja  $(\dots)_+$

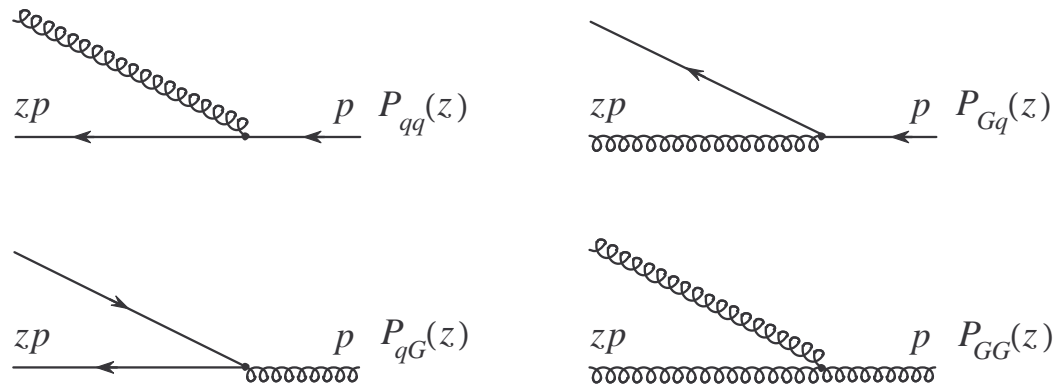
$$\int_0^1 dz (\dots)_+ g(z) = \int_0^1 dz (\dots) [g(z) - g(1)]$$

W naszym konkretnym przypadku

$$P_{qq} \otimes q = C_F \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ q\left(\frac{x}{z}\right) = C_F \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right) \left[ q\left(\frac{x}{z}\right) - q(x) \right]$$



# Prawdopodobieństwa Altarelli-Parisi

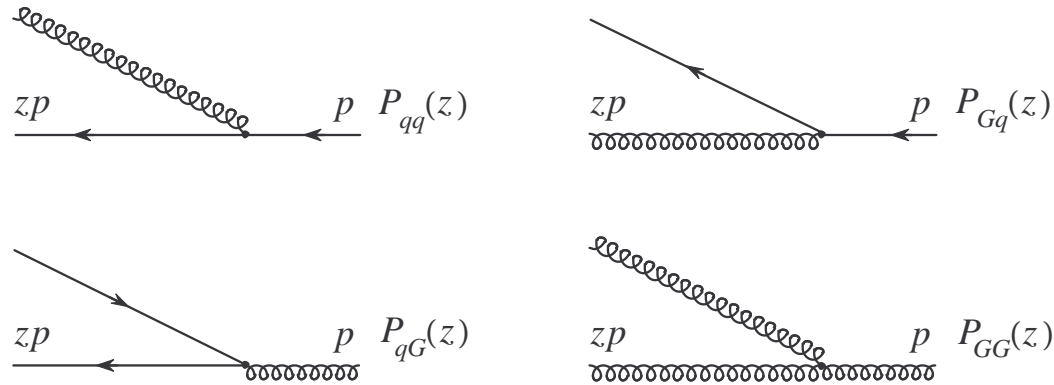


Podsumowując

$$P_{qq}(z) = C_F \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right)_+, \quad P_{Gq}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad P_{qG}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2]$$

$$P_{GG}(z) = 2C_A \left[ \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{11}{3}C_A - \frac{2}{3}n_f \right) \delta(1-z)$$

# Prawdopodobieństwa Altarelli-Parisi



Symetrie

$$P_{qG}(z) = P_{\bar{q}G}(z), \quad P_{Gq}(z) = P_{G\bar{q}}(z),$$

$$P_{qq}(z) = P_{Gq}(1 - z), \quad P_{GG}(z) = P_{G\bar{G}}(1 - z), \quad P_{qG}(z) = P_{qG}(1 - z).$$

## Równania ewolucji

Przepiszmy równania DGLAP wprowadzając rozkład singletowy i niesingletowy

$$q^S(x, Q^2) = \sum_i (q_i(x, Q^2) + \bar{q}_i(x, Q^2))$$

$$q_i^{NS}(x, Q^2) = q_i(x, Q^2) - \bar{q}_i(x, Q^2) = q_i(x, Q^2) - \frac{1}{2n_f} q^S(x, Q^2)$$

Wówczas

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} q^{NS}(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{qq} \otimes q^{NS}(Q^2)$$

oraz

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} q^S(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} [P_{qq} \otimes q^S(Q^2) + 2n_f P_{qG} \otimes G(Q^2)]$$

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} G(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} [P_{Gq} \otimes q^S(Q^2) + P_{GG} \otimes G(Q^2)]$$

## Równania ewolucji

Momenty konwolucji:

$$\begin{aligned} M_n &= \int_0^1 dx x^{n-1} P \otimes f = \int_0^1 dx x^{n-1} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \delta(zy - x) P(z) f(y) \\ &= \int_0^1 dz z^{n-1} P(z) \int_0^1 dy y^{n-1} f(y) = P_n f_n = \gamma^n f_n \end{aligned}$$

Wielkości  $\gamma^n$  nazywamy wymiarami anomalnymi.

## Równania ewolucji

Zatem równania DGLAP dla momentów przyjmują formę macierzową. Oznaczając  $t = \ln Q^2 / \Lambda_{QCD}^2$

$$\frac{dq_n^{NS}(t)}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \gamma_{qq}^n q_n^{NS}(t)$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_n^S(t) \\ G_n(t) \end{bmatrix} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \begin{bmatrix} \gamma_{qq}^n & 2n_f \gamma_{qG}^n \\ \gamma_{Gq}^n & \gamma_{GG}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n^S(t) \\ G_n(t) \end{bmatrix},$$

## Wymiary anomalne

Momenty prawdopodobieństw AP nazywamy **wymiarami anomalnymi**:

$$\begin{aligned}\gamma_{qq}^n &= C_F \left[ -2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{3}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right], \\ \gamma_{qG}^n &= \frac{1}{2} \frac{2+n+n^2}{n(n+1)(n+2)}, \\ \gamma_{Gq}^n &= C_F \frac{2+n+n^2}{n(n^2-1)} \\ \gamma_{Gq}^n &= 2C_A \left[ \frac{11}{12} - \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right] - \frac{n_f}{3}\end{aligned}$$

Interesujące nas wartości:

$$\gamma_{qq}^1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dq_n^{NS}(t)}{dt} = 0$$

a to oznacza

$$\int dx [q_i(x, Q^2) - \bar{q}_i(x, Q^2)] = \text{const.} = \int dx q_{Vi}(x, Q^2)$$

zachowanie liczby kwarków walencyjnych.

Rozwiązanie równania niesingletowego dla  $n > 2$ :

$$\frac{\alpha_s(t)}{2\pi} = \frac{2}{\beta_0 t}$$

$$\frac{dq_n^{NS}(t)}{q_n^{NS}(t)} = \frac{2\gamma_{qq}^n}{\beta_0} \frac{dt}{t} \rightarrow q_n^{NS}(t) = q_n^{NS}(t_0) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2\gamma_{qq}^n/\beta_0}$$

Ponieważ  $\beta_0 > 0$  natomiast  $\gamma_{qq}^n \leq 0$ , zatem

$$q_n^{NS}(t) \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow \infty.$$

## Równania niesingletowe

Dla  $n = 2$  (pęd niesony przez kwarki lub gluony) mamy

$$\frac{d}{dt}q_2^S(t) = -\frac{2}{\beta_0 t} \left[ \frac{4C_F}{3} q_2^S(t) - \frac{n_f}{3} G_2(t) \right] = -\frac{2}{\beta_0 t} f(t),$$

$$\frac{d}{dt}G_2(t) = +\frac{2}{\beta_0 t} \left[ \frac{4C_F}{3} q_2^S(t) - \frac{n_f}{3} G_2(t) \right] = +\frac{2}{\beta_0 t} f(t).$$

gdzie

$$f(t) = \frac{4C_F}{3} q_2^S(t) - \frac{n_f}{3} G_2(t).$$

Dodając stronami mamy

$$\begin{aligned} q_2^S(t) + G_2(t) &= \text{const.} \\ &= \int dx x \left[ \sum_i (q_i(x, Q^2) + \bar{q}_i(x, Q^2)) + G(x, Q^2) \right] = 1 \end{aligned}$$

zachowanie całkowitego pędu.



## Pęd gluonów

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q_2^S(t) &= -\frac{2}{\beta_0 t} \left[ \frac{4C_F}{3} q_2^S(t) - \frac{n_f}{3} G_2(t) \right] = -\frac{2}{\beta_0 t} f(t), \\ \frac{d}{dt}G_2(t) &= +\frac{2}{\beta_0 t} \left[ \frac{4C_F}{3} q_2^S(t) - \frac{n_f}{3} G_2(t) \right] = +\frac{2}{\beta_0 t} f(t).\end{aligned}$$

Tworząc kombinację liniową

$$\frac{4C_F}{3} \frac{d}{dt}q_2^S(t) - \frac{n_f}{3} \frac{d}{dt}G_2(t) = \frac{d}{dt}f(t) = -\frac{2}{\beta_0 t} \left[ \frac{4C_F}{3} + \frac{n_f}{3} \right] f(t)$$

Oznaczając

$$c = \frac{4C_F}{3} + \frac{n_f}{3} > 0$$

mamy

$$\frac{d}{dt}f(t) = -\frac{2c}{\beta_0 t} f(t) \rightarrow f(t) = f(t_0) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-2c/\beta_0} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

## Pęd gluonów

Asymptotycznie

$$f(t) = \frac{4C_F}{3} q_2^S(t) - \frac{n_f}{3} G_2(t) = 0 \quad \text{oraz} \quad q_2^S(t) + G_2(t) = 1$$

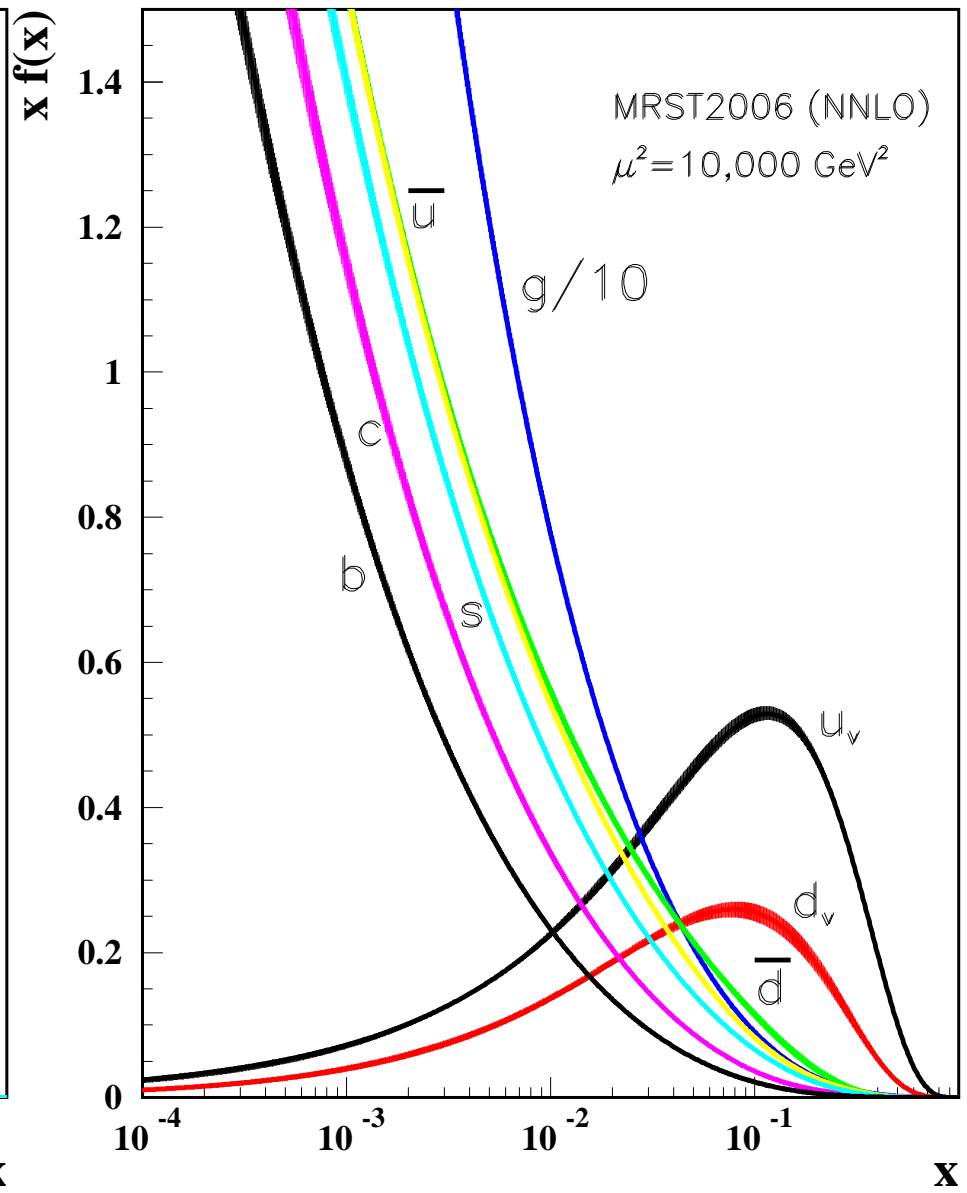
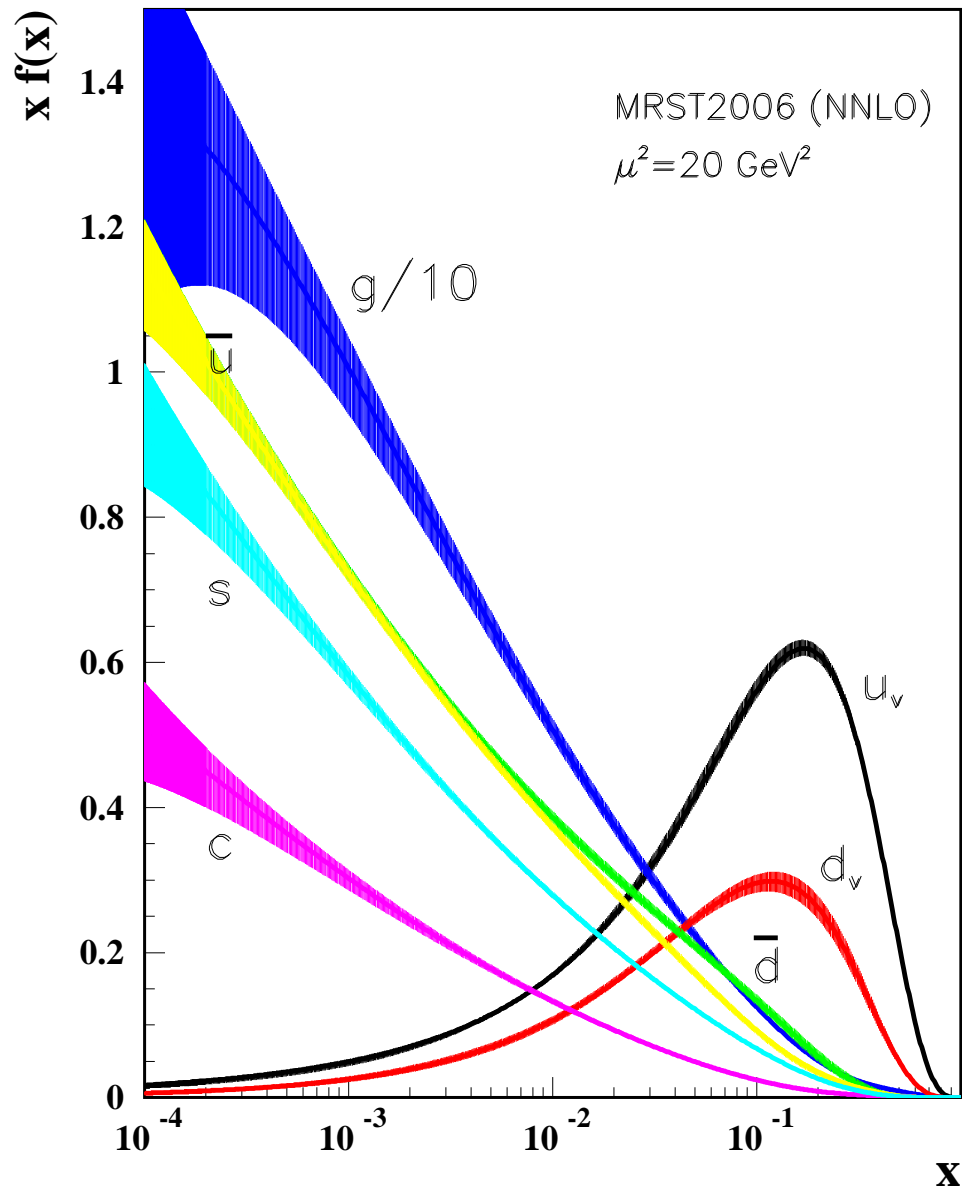
co daje

$$q_2^S(t) = \frac{n_f}{4C_F} G_2(t) \quad \rightarrow \quad \left[ \frac{n_f}{4C_F} + 1 \right] G_2(t) = 1$$

i ostatecznie

$$G_2(t) = \frac{1}{\frac{n_f}{4C_F} + 1} = \frac{16}{16 + 3n_f} = \begin{matrix} 0.64, & 0.57, & 0.52, & 0.47 \\ n_f=3 & n_f=4 & n_f=5 & n_f=6 \end{matrix}$$

Gluony niosą ponad połowę pędu!



## Pozostałe zagadnienia

- fizyka małych  $x$
- procesy ekskluzywne, czynniki kształtu, uogólnione rozkłady partonowe
- chromodynamika przy niskich energiach – teorie efektywne
- symetria chiralna i jej łamanie
- anomalie
- rozwiązania klasyczne: instantony
- problem uwieżięzienia
- chromodynamika na sieciach
- chromodynamika przy wysokich gęstościach i temperaturach
- diagram fazowy
- ...