Chromodynamika kwantowa: grupa SU(3)

Co trzyma kwarki związane w hadronach?

Teoria z symetrią cechowania oparta na grupie SU(3) (lub SU(N_c)):

$$u = \begin{bmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{bmatrix}$$

każdy u_i jest czteorokomponentowym bispinorem Diraka. Lokalna symetria SU(3):

$$q(x) \longrightarrow q'(x) = U(x)q(x)$$

gdzie $U(x)$ jest macierzą unitarną 3×3 o wyznaczniku 1. Jest sparametryzowana $N_c^2-1 = 8$ rzeczywistymi parametrami. Można ją zapisać jako

$$U(x) = e^{i\lambda_a \alpha_a(x)/2}$$

gdzie $N_c^2 - 1 = 8$ macierzy Gell-Mana λ_a spełnia relację komutacji:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c \quad a, b, c = 1, 2 \ldots 8$$

analogicznie do

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\lambda_k \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

gdzie f_{abc} są stałymi struktury (antysymetryczne). Różnica: stałe d_{abc} (symetryczne):

$$\tau_i\tau_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\tau_k,$$
$$\lambda_a\lambda_b = \frac{2}{3}\delta_{ab} + if_{abc}\lambda_c + d_{abc}\lambda_c.$$

Pochodna kowariantna

Analogicznie do grupy SU(2) wprowadzmy pola cechowania – gluony:

$$\boldsymbol{W}_\mu(x) = \sum_{k=1}^{3} W_\mu^k(x)\tau_k \to \boldsymbol{G}_\mu(x) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} G_\mu^a(x)\lambda_a$$

Transformacja pola:

$$\boldsymbol{W}'_\mu = U\boldsymbol{W}_\mu U^\dagger + i\frac{2}{g_2}\left(\partial_\mu U\right)U^\dagger \to \boldsymbol{G}'_\mu = U\boldsymbol{G}_\mu U^\dagger + i\frac{1}{g}\left(\partial_\mu U\right)U^\dagger.$$

Pochodna kowariantna:

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g_2}{2}\boldsymbol{W}_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ig\boldsymbol{G}_\mu$$

Mamy zatem

$$q \to q' = Uq, \quad D_\mu q \to D'_\mu q' = UD_\mu q$$

Tensor pola

$$\boldsymbol{G}_{\mu\nu} = D_\mu \boldsymbol{G}_\nu - D_\nu \boldsymbol{G}_\mu = \partial_\mu \boldsymbol{G}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{G}_\mu + ig\left[\boldsymbol{G}_\mu, \boldsymbol{G}_\nu\right]$$

Gęstość Lagrange'a

$$L = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{G}_{\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu}\right] + \sum_{f=1}^{6}\left[\overline{q}_f\, i\gamma^{\mu} D_{\mu} q_f - m\overline{q}_f\, q_f\right]$$

Dlaczego grupa SU(3)?

Niezmienniki grupy SU(3):

$$\delta_{ab}, \qquad \varepsilon_{abc}$$

albowiem:

$$U^\dagger U = 1 \longrightarrow U^\dagger_{ab}\delta_{bc}U_{cd} = \delta_{ad}$$

oraz

$$\varepsilon_{abc}U_{aa'}U_{bb'}U_{cc'} = \varepsilon_{a'b'c'} \det U = \varepsilon_{a'b'c'}$$

Jest to analogon związku dla SU(2)

$$U^T \varepsilon U = \varepsilon \longrightarrow U^T_{a'a}\varepsilon_{ab}U_{bb'} = \varepsilon_{ab}U_{aa'}U_{bb'} = \varepsilon_{a'b'}.$$

Zatem singlety kolorowe to stany

$$M_{12} = q_1^\dagger q_2 = \begin{bmatrix} q^*_{r1}, q^*_{g1}, q^*_{b1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{r2} \\ q_{g2} \\ q_{b2} \end{bmatrix} \qquad \text{mezony}$$

$$B_{123} = \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{abc}q_{a1}q_{b2}q_{c3} \qquad \text{bariony}$$

Naiwny model kwarków: kwarki w uśrednionym potencjale siedzą na poziomie podstawowym (jak elektrony w atomie wodoru) – czyli w fali s. Jak zatem możliwe jest istnienie rezonansu Δ który składa się z trzech kwarków u, każdy ze spinem $+1/2$? Funkcja falowa

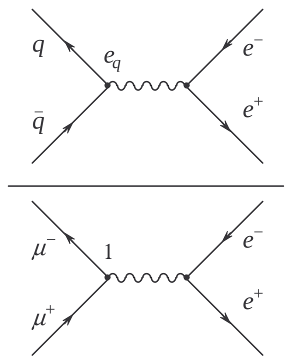
$$\Delta = u^{\uparrow}(x)u^{\uparrow}(y)u^{\uparrow}(z)$$

$$\begin{aligned} \text{przestrzenna} &\rightarrow \text{symetryczna} \\ \text{spinowa} &\rightarrow \text{symetryczna} \\ \text{kolorowa} &\rightarrow \text{antysymetryczna} \end{aligned}$$

Dlaczego grupa SU(3)?

Policzmy stosunek:

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \to \text{hadrons}}}{\sigma_{e^+e^- \to \mu^+\mu^-}}$$



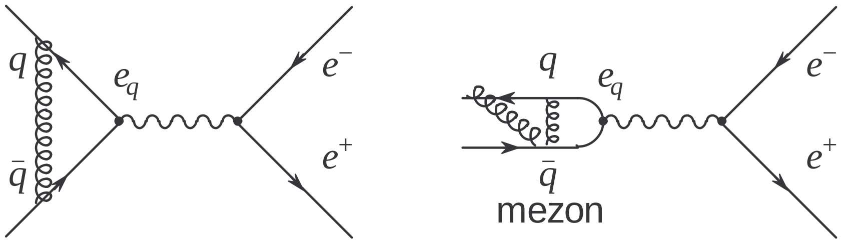
Dla energii poniżej progu na charm ($E < 3$ GeV) i.t.d.:

$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

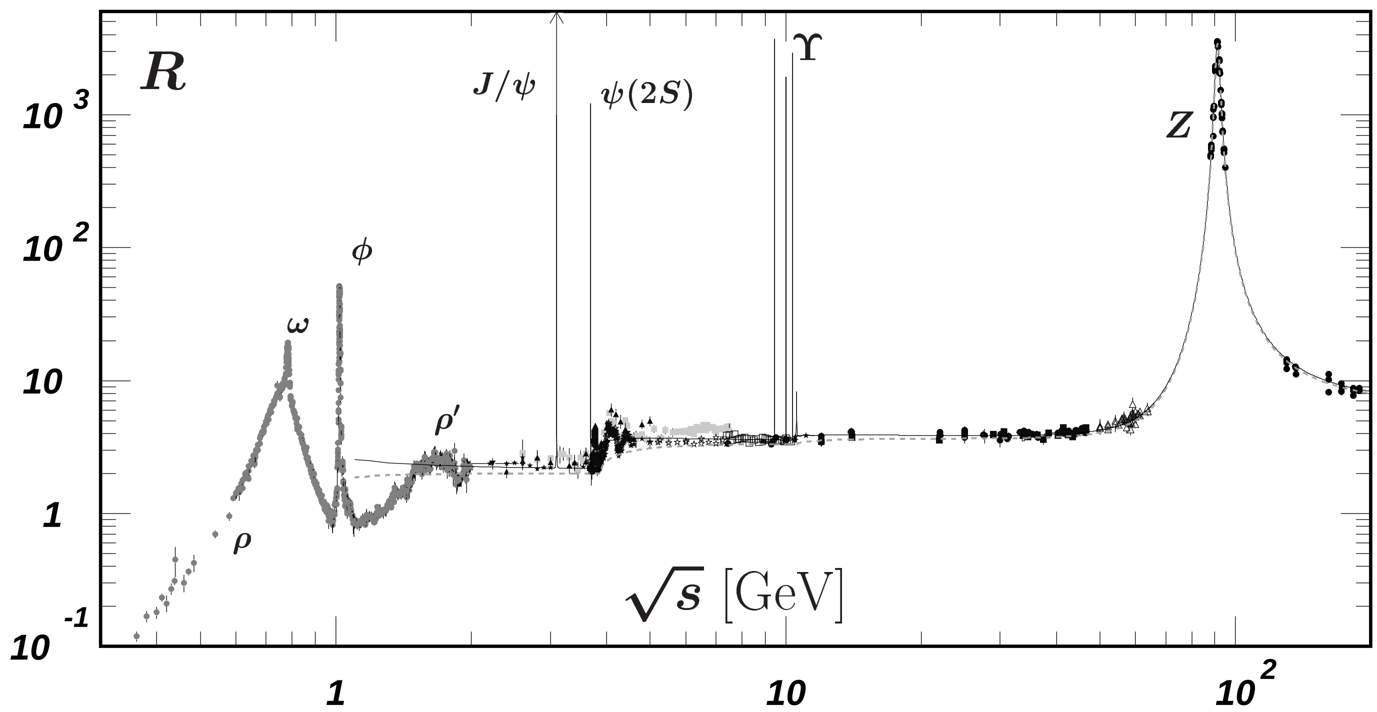
$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 + e_c^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 + e_c^2 + e_b^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}$$

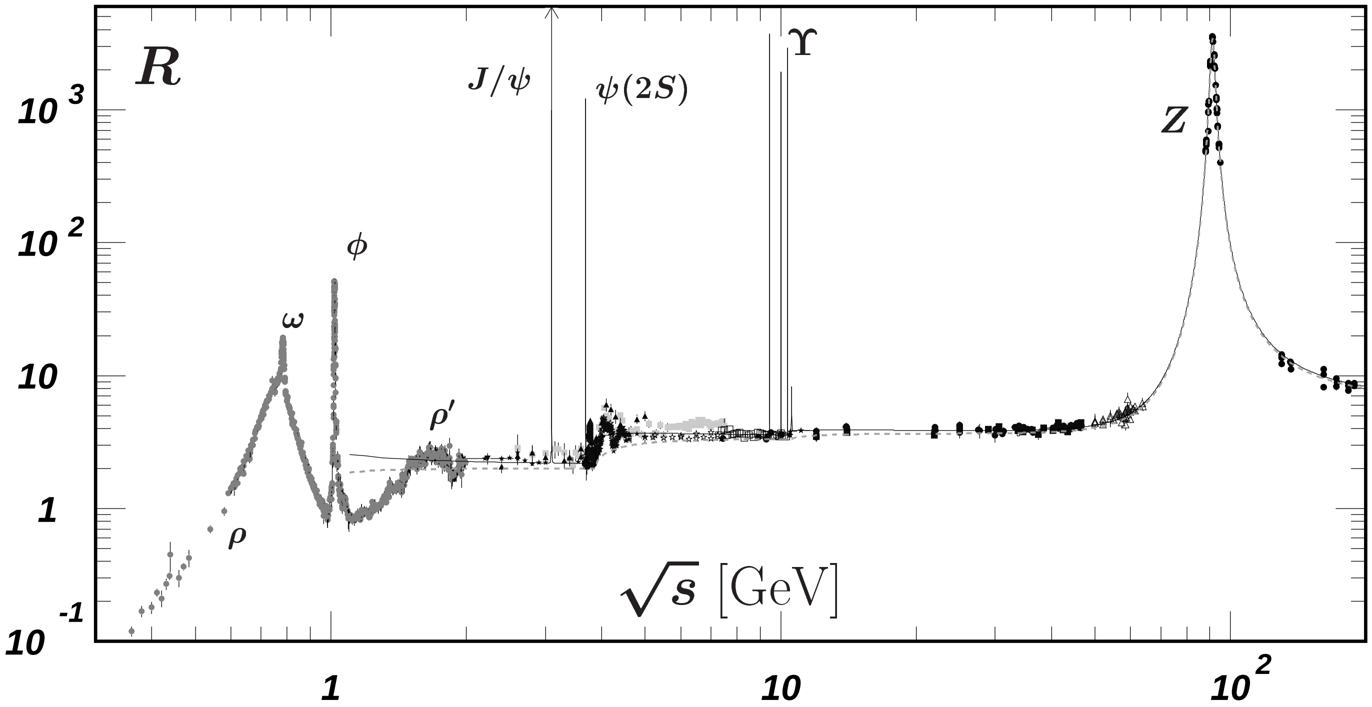
Poprawki:



Poprawki perturbacyjne – małe, nieperturbacyjne – duże, ale waskie.

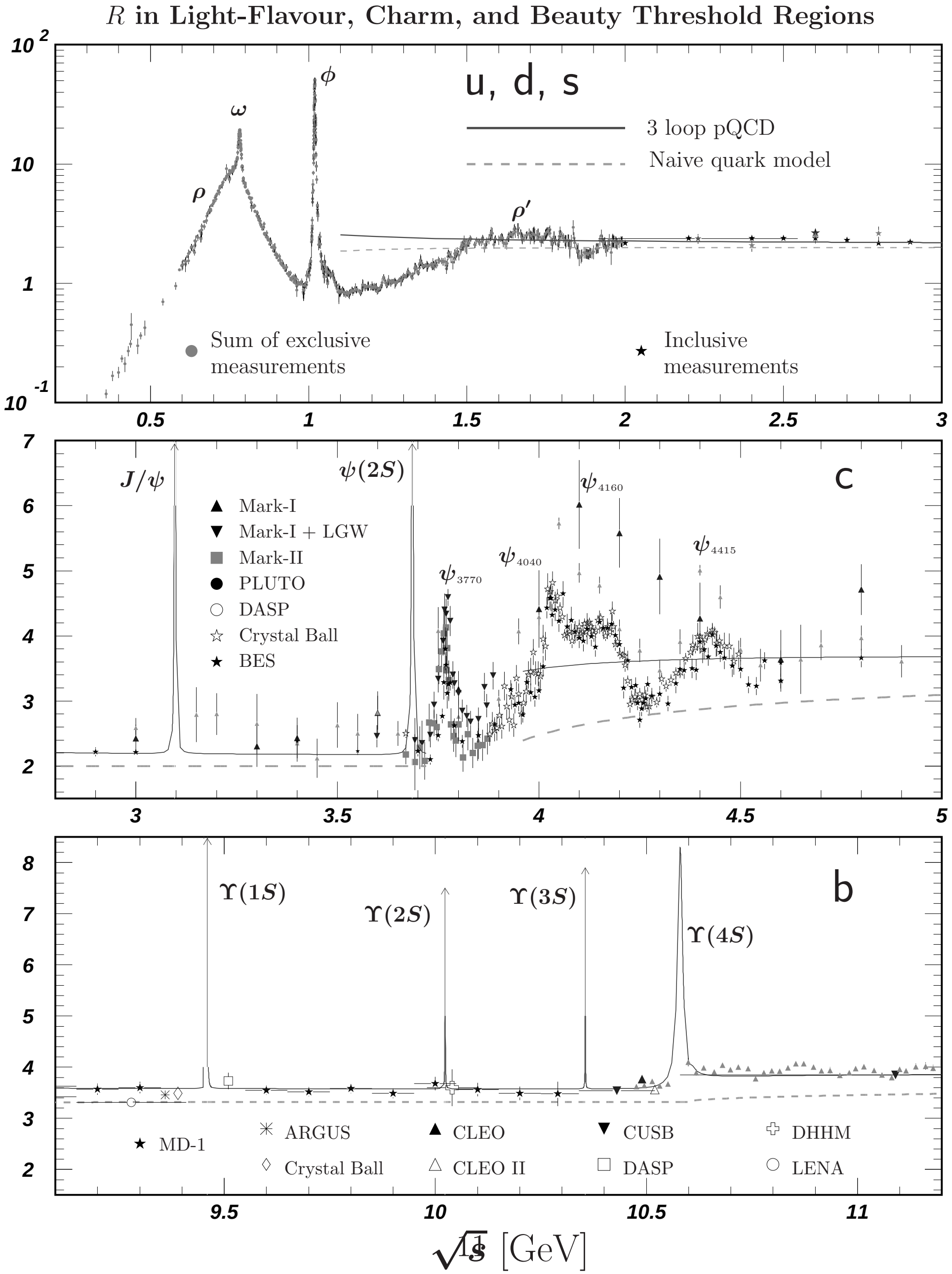


$$R = e_d^2 + e_u^2 + e_s^2 = \frac{2}{3} + e_c^2 = \frac{10}{9} + e_b^2 = \frac{11}{9}$$



$$R = 3\left(e_d^2 + e_u^2 + e_s^2\right) = 2 + 3e_c^2 = \frac{10}{3} + 3e_b^2 = \frac{11}{3}$$

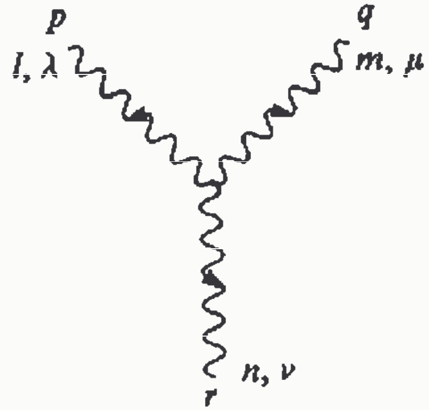
Uwzględnienie koloru $N_c = 3$ daje zgodnosc z doswiadczeniem.



R in Light-Flavour, Charm, and Beauty Threshold Regions
u, d, s
3 loop pQCD
Naive quark model
Sum of exclusive measurements
Inclusive measurements
ω
ϕ
ρ
ρ'
c
J/ψ
$\psi(2S)$
ψ_{3770}
ψ_{4040}
ψ_{4160}
ψ_{4415}
Mark-I
Mark-I + LGW
Mark-II
PLUTO
DASP
Crystal Ball
BES
b
$\Upsilon(1S)$
$\Upsilon(2S)$
$\Upsilon(3S)$
$\Upsilon(4S)$
MD-1
ARGUS
Crystal Ball
CLEO
CLEO II
CUSB
DASP
DHHM
LENA
$\sqrt{s}$ [GeV]

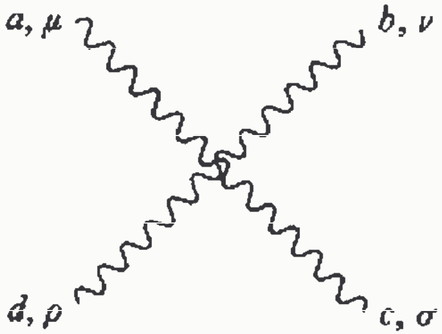
Feynman rules for QCD

three-gluon coupling



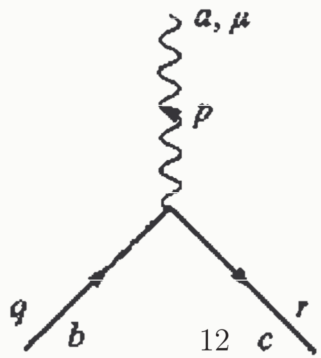
$$-g c_{lmn}[(r-p)_\mu g_{\lambda\nu} + (r-q)_\lambda g_{\mu\nu} + (q-p)_\nu g_{\lambda\mu}]$$

four-gluon coupling



$$(-ig^2)[c_{abe}c_{cde}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) + c_{ace}c_{bde}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) + c_{ade}c_{cbe}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma})]$$

quark–quark–gluon vertex



$$-ig\gamma_\mu (T^a)_{bc}$$
$$\mathrm{Tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

Renormalizacja

Najpierw trzeba dokonać regularyzacji.

- Obcięcie czterowymiarowe ($\Lambda \to \infty$)

$$\underbrace{g^2 \int^{\infty} \frac{dk}{k}}_{\text{skończone}} \to g_\Lambda^2 \int^{\Lambda} \frac{dk}{k} = g_\Lambda^2 \ln \Lambda + \text{skończone}$$

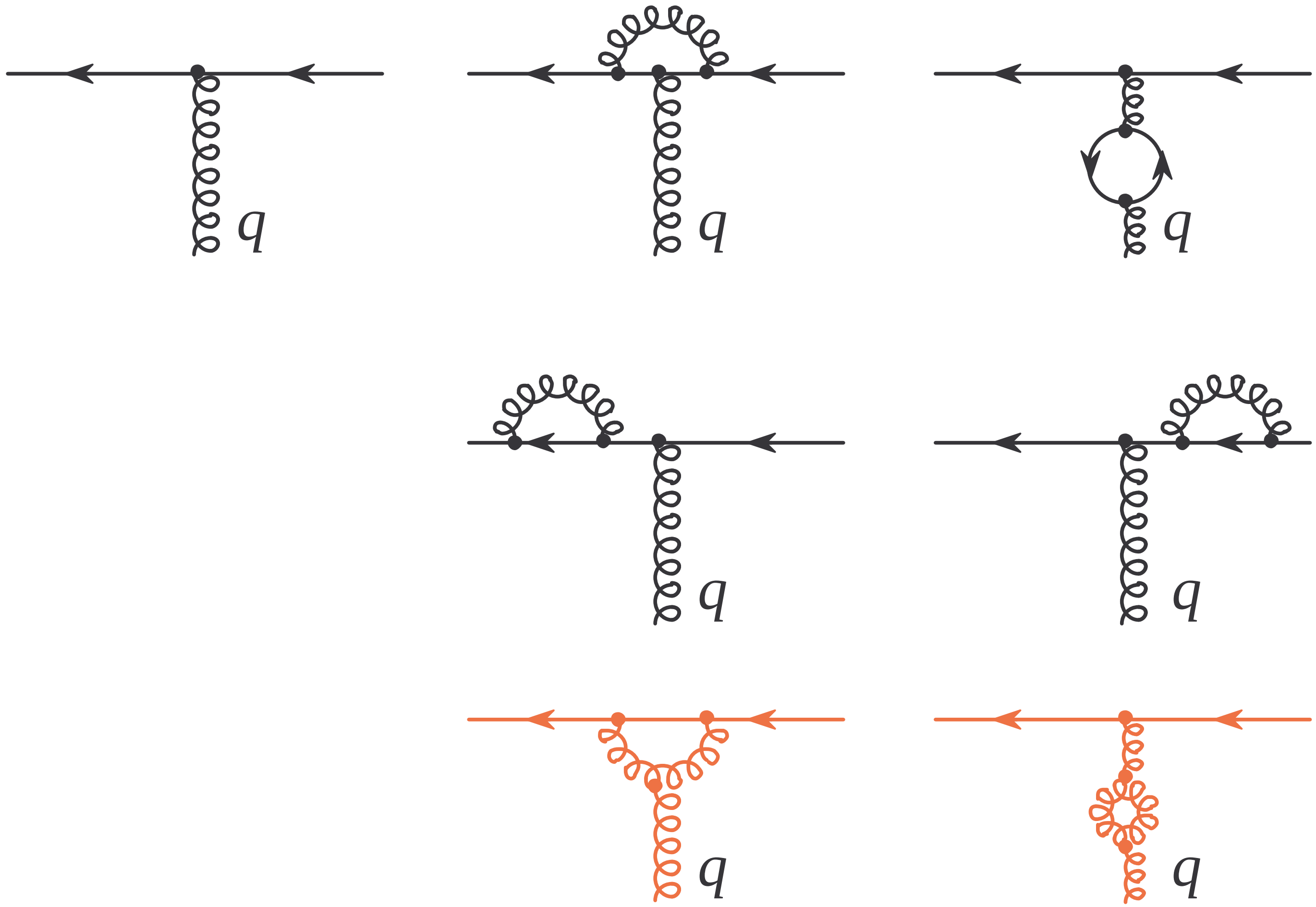
- Regularyzacja wymiarowa ($\varepsilon \to 0$)

$$\underbrace{g^2 \int^{\infty} \frac{dk}{k}}_{\text{skończone}} \to g_\varepsilon^2 \int^{\infty} k^{-\varepsilon} \frac{dk}{k} = g_\varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon} \; k^{-\varepsilon} \Big|_{\text{skończone}}^{\infty} \to -g_\varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon} \times \text{skończone}$$

Renormalizacja polega na *wepchnięciu* nieskończoności do

- stałej sprzężenia,
- mas cząstek,
- funkcji falowych.

Poprawki do wierzchołka fermion-gluon:



Mamy ($Q^2 = -q^2$):

$$\text{suma} = g_\Lambda \left(1 - {g_\Lambda}^2 \left(a \,\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + b\right) + \ldots\right)$$

Renormalizacja polega na wciągnięciu nieskończoności do g_Λ:

$$g_\Lambda = g - a g^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} + \ldots$$

Tu g jest liczbą

$$\begin{aligned}
\text{suma} = &\left(g - a g^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} + \ldots\right) \left(1 - \left(g - a g^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} + \ldots\right)^2 \left(a \,\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + b\right) + \ldots\right) \\
&= g - a g^3 \ln \frac{\Lambda^2}{Q_0^2} - g^3 a \,\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \ldots \\
&= g - a g^3 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} + \ldots = g(Q^2).
\end{aligned}$$

Lepiej zapisać to dla stałej g^2:

$$g^2(Q^2) = g^2 - 2 a g^4 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} + \ldots = \frac{g^2}{1 + 2 a g^2 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}}$$

Co to jest g^2?

$$g^2 = g^2(Q_0^2)$$

Spróbujemy nieznaną wartość g w arbitralnym (acz ustalonym) punkcie Q_0^2 zastąpić przez jedną stałą. Najpierw przepiszmy

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} = \frac{1}{g^2(Q_0^2)}\left(1 + 2ag^2(Q_0^2)\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right) = \frac{1}{g^2(Q_0^2)} + 2a\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}$$

co daje

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} - 2a\ln Q^2 = \frac{1}{g^2(Q_0^2)} - 2a\ln Q_0^2 \overset{\text{ozn.}}{=} -2a\ln\Lambda_{QCD}^2$$

co daje

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} = 2a\ln\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \rightarrow g^2(Q^2) = \frac{1}{2a\ln\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}}$$

Jest to wzór asymptotyczny. Jego sensowność zależy od znaku a.

Jeżeli a jest ujemne to wzór

$$g^2(Q^2) = \frac{g^2}{1 + 2ag^2 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}}$$

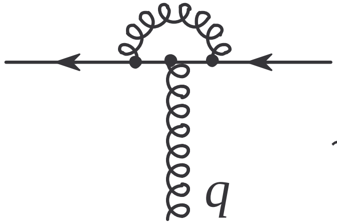
ma osobliwość (biegun Landaua w elektrodynamice), jeżeli a jest dodatnie, $g^2(Q^2)$ znika dla dużych Q^2 (asymptotyczna swoboda). Używając (standardowa notacja):

$$\alpha(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}}, \quad \beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{2}{3} n_f$$

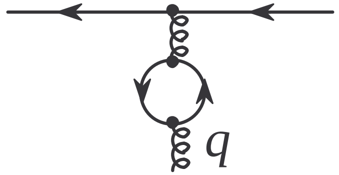
gdzie

$n_f \rightarrow$ liczba kwarków w diagramie pętlowym

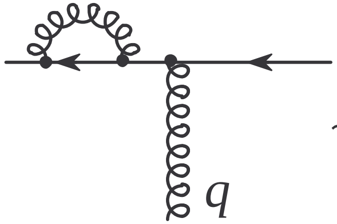
$C_A \rightarrow$ operator Casimira dla grupy $\mathrm{SU}(N_c)$



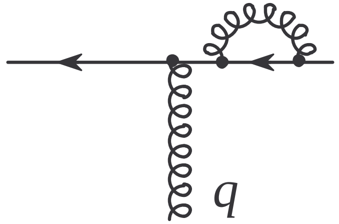
$$\sim C_F - \frac{C_A}{2}$$



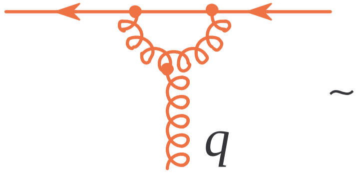
$$\sim -n_f$$



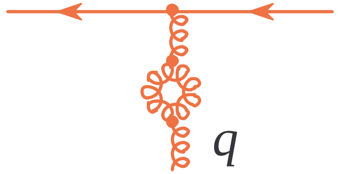
$$\sim C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}$$



$$\sim C_F$$

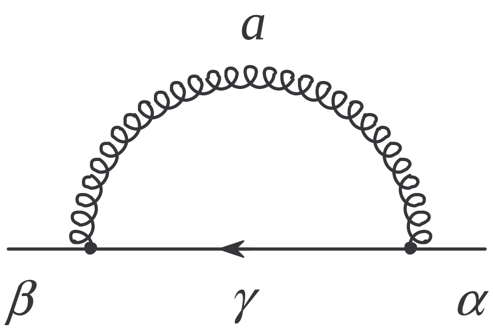


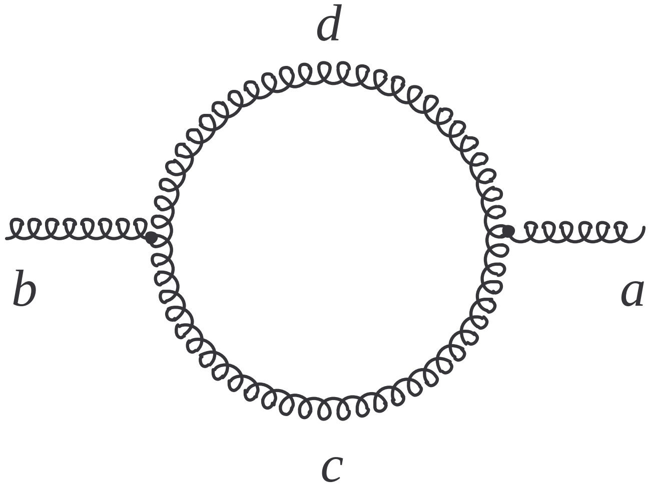
$$\sim \frac{C_A}{2} = \frac{N_c}{2}$$



$$\sim C_A = N_c$$

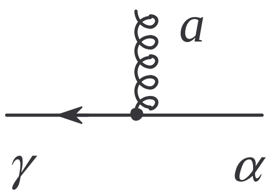
Czynniki kolorowe





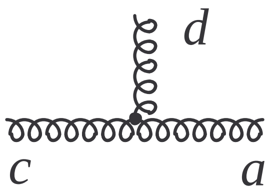
$$\sum_{a,\gamma} T^a_{\beta\gamma} T^a_{\gamma\alpha} = C_F \, \delta_{\beta\alpha}$$

$$T^a_{\gamma\alpha} = \frac{1}{2} \lambda^a_{\gamma\alpha}$$



$$\sum_{c,d} T^d_{bc} \, T^d_{ca} = C_A \, \delta_{ba}$$

$$T^d_{ca} = -i f_{dca}$$



gdzie:

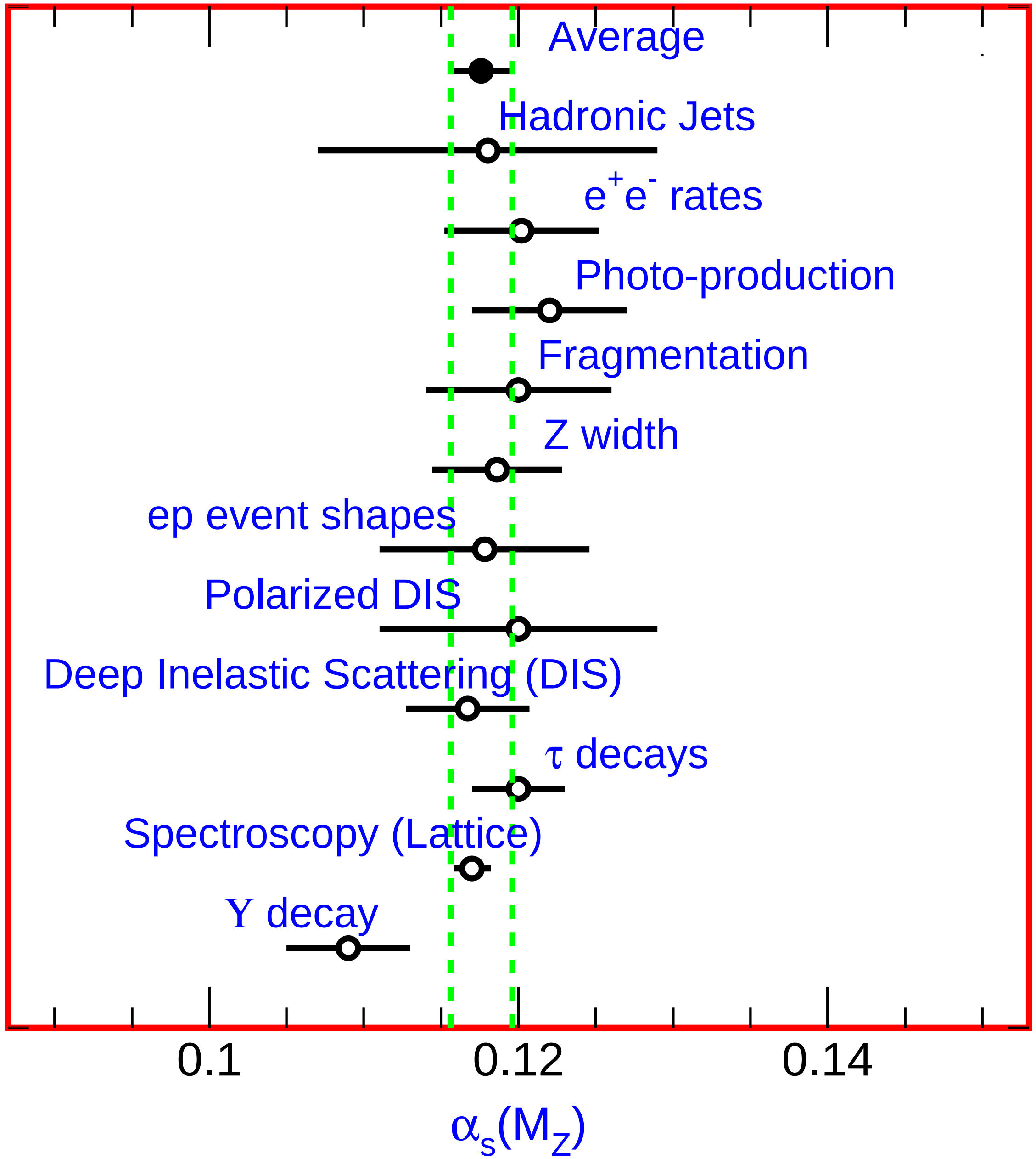
$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}, \quad C_A = N_c$$

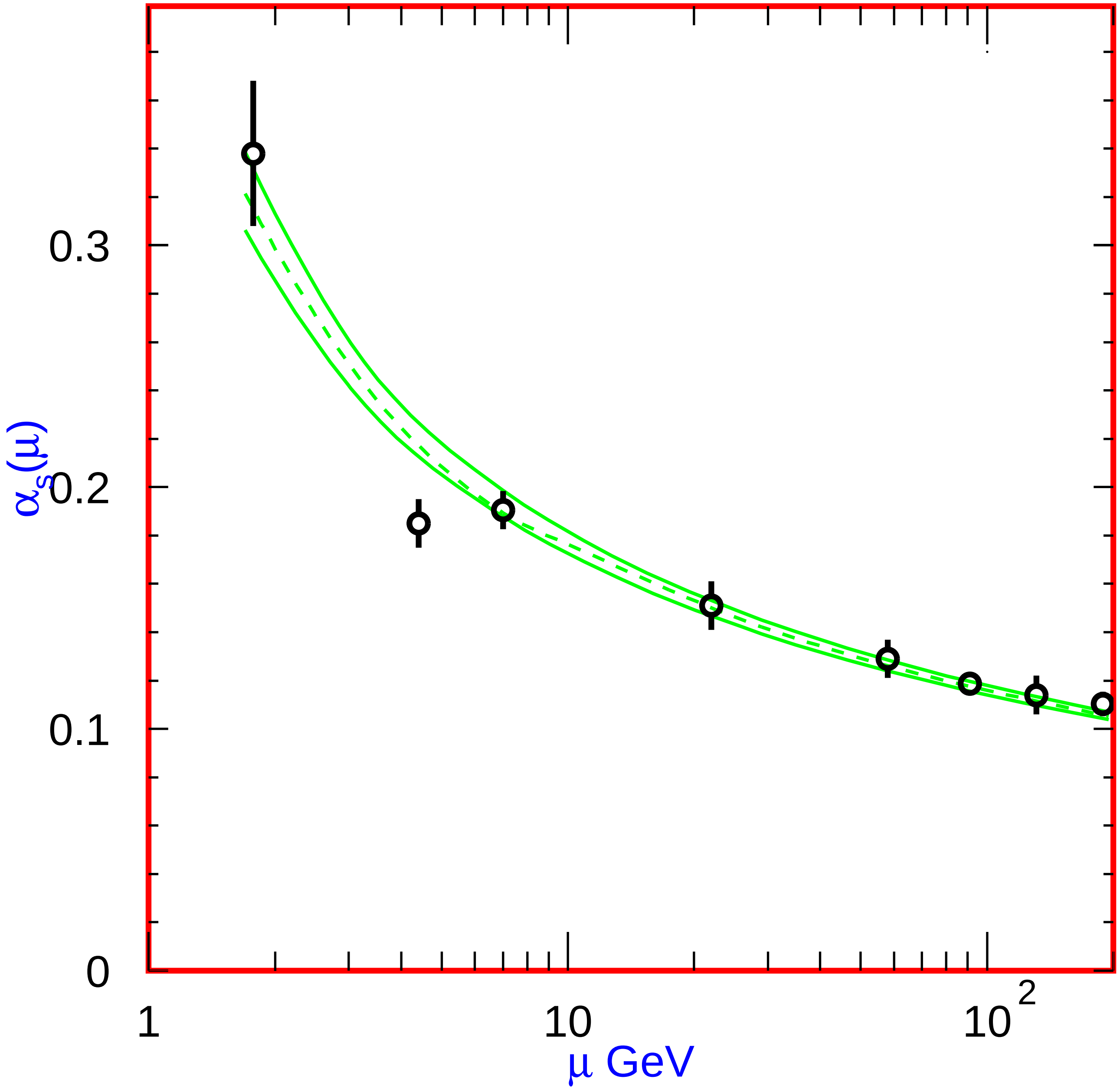
dla SU(N_c =2) $C_s = s(s+1)$, reprezentacja fundamentalna $s = 1/2$, reprezentacja dołączona (adjoint) $s = 1$.

Uniwersalność: to samo wychodzi dla rachunku z wierzchołkiem gluonowym.
Grupa renormalizacji:

$$
\begin{aligned}
\mu\frac{\partial\alpha_s}{\partial\mu} = 2\beta(\alpha_s) = \; & -\frac{\beta_0}{2\pi}\,\alpha_s^2 \;-\; \frac{\beta_1}{4\pi^2}\,\alpha_s^3 \;-\; \frac{\beta_2}{64\pi^3}\,\alpha_s^4 \;-\; \cdots \;, \\
\beta_0 &= 11 - \frac{2}{3}n_f \;, \\
\beta_1 &= 51 - \frac{19}{3}n_f \;, \\
\beta_2 &= 2857 - \frac{5033}{9}n_f + \frac{325}{27}n_f^2 \;;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0\;\ln(\mu^2/\Lambda^2)}\Bigg[1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2}\;\frac{\ln\left[\ln(\mu^2/\Lambda^2)\right]}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} + \frac{4\beta_1^2}{\beta_0^4\ln^2(\mu^2/\Lambda^2)} \\
\times\left(\left(\ln\left[\ln(\mu^2/\Lambda^2)\right] - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\beta_2\beta_0}{8\beta_1^2} - \frac{5}{4}\right)\Bigg] \;.
\end{aligned}
$$


Average
Hadronic Jets
e+e- rates
Photo-production
Fragmentation
Z width
ep event shapes
Polarized DIS
Deep Inelastic Scattering (DIS)
τ decays
Spectroscopy (Lattice)
Υ decay
0.1
0.12
0.14
$\alpha_s(M_Z)$


0.3
0.2
0.1
0
1
10
10^2
αs(μ)
μ GeV