Model z lokalną symetrią SU(2)×U(1)

Dla pełnej teorii z symetrią SU(2)×U(1):

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)\tau_0} U\Phi, \quad U = e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix}$$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{dyn} + \mathcal{L}_\Phi$$

$$\mathcal{L}_{dyn} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{W}_{\mu\nu}\boldsymbol{W}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^3_{\mu\nu}W^{3\,\mu\nu} - \frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\,\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu\Phi)^\dagger (D^\mu\Phi) - V(\Phi^\dagger\Phi)$$

gdzie

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad \boldsymbol{W}_{\mu\nu} = D_\mu \boldsymbol{W}_\nu - D_\nu \boldsymbol{W}_\mu.$$

pochodna kowariantna

$$D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g_1}{2}B^\mu + i\frac{g_2}{2}\boldsymbol{W}^\mu$$

Łamanie lokalnej symetrii SU(2)

$$\begin{aligned} V(\Phi^\dagger\Phi) &= \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2\right]^2 \\ &= \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2+\phi_4^2-\phi_0^2\right]^2 \end{aligned}$$

wzbudzenia mają postać

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x) \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 \qquad \longleftarrow \text{ masywne pole skalarne}$$

$$- \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu$$

$\uparrow$ masywne pole wektorowe

$$- \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \qquad \longleftarrow \text{ bezmasowe pole wektorowe}$$

$\downarrow$ masywne, naładowane pole wektorowe

$$- \frac{1}{2}\left(\Delta^*_\mu W^-_\nu - \Delta^*_\nu W^-_\mu\right)\left(\Delta^\mu W^{+\,\nu} - \Delta^\nu W^{+\,\mu}\right) + \frac{1}{2} g_2^2 \phi_0^2 W^-_\mu W^{+\,\mu}$$

gdzie: $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ oraz pochodna kowariantna

$$\Delta_\mu W^+_\mu = (\partial_\mu + i g_2 \sin\theta_W A_\mu)\, W^+_\mu$$

$$\Delta^*_\mu W^+_\mu = (\partial_\mu - i g_2 \sin\theta_W A_\mu)\, W^-_\mu$$

Jak dołączyć do tego modelu fermiony?

Trzeba skonstruować model dynamiczny sprzęgający pion do leptonu i neutrina, uwzględnić przestrzeń fazową. Ale mamy pierwsze wnioski:

- neutrina są (prawie) bezmasowe
- w oddziaływaniach słabych biorą udział leptony lewoskrętne

Dodatkowo pamietajmy:

$$e = g_2 \sin\theta_W = g_1 \cos\theta_W$$

Teoria Fermiego

Prądy:

$$j_\nu = \overline{\psi}_e \gamma_\nu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_e + \overline{\psi}_\mu \gamma_\nu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_\mu + \overline{\psi}_\tau \gamma_\nu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_\tau$$

oddziaływanie

$$\mathcal{L} = -2\sqrt{2} G_F \, g^{\nu\mu} j_\nu j^\dagger_\mu$$

$$G_F = 1.16639 \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}.$$

Pamietajmy (wykład 3)

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_L \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_R \end{bmatrix}$$

Będziemy chcieli zastąpić

$$G_F g^{\nu\mu} \longrightarrow D^{\nu\mu}$$

propagator

$$D^{\nu\mu} \sim \frac{g^{\nu\mu}}{p^2 - M^2}$$

Fermiony lewoskrętne

Równanie Diraka:

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta m)\psi = 0.$$

Rozpiszmy ψ przy użyciu dwukomponentowych spinorów Weyla:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix},\ \alpha_i = \begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Równanie Diraka jest równoważne dwóm równaniom:

$$\left(i\partial_t - i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_L - m\psi_R = 0, \qquad \left(i\partial_t + i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_R - m\psi_L = 0.$$

Wprowadzając „czterowektory"

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}), \quad \partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla}), \quad \partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla}).$$

mamy gęstość Lagrange'a (patrz wykład 3 str 2):

$$\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L)$$

Jeżeli $m = 0$ ψ_L i ψ_R są niezależnymi polami.

Leptony w modelu Weinberga-Salama U(1)×SU(2)

Dublety SU(2):

$$L = \begin{bmatrix} L_A \\ L_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

Transformacja SU(2)

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow L' = UL, \\ \Phi &\longrightarrow \Phi' = U\Phi, \\ U &= e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}} \end{aligned}$$

gdzie U jest tym samym U, które działa na Φ. U miesza różne pola, więc muszą mieć tę samą skrętność, nie mogą mieć masy. Prawoskrętne leptony się nie transformują:

$$\begin{aligned} e_R &\longrightarrow e'_R = e_R \\ \nu_{eR} &\longrightarrow \nu'_{eR} = \nu_{eR} \end{aligned}$$

Pochodna kowariantna dla pól lewoskrętnych

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}B_\mu + i\frac{g_2}{2}\boldsymbol{W}_\mu\right)\Phi$$

$$\tilde{D}_\mu L = \left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2}B_\mu + i\frac{g_2}{2}\boldsymbol{W}_\mu\right)L$$

Stała g_2 jest taka sama, ale g' trzeba tak dobrać, żeby foton nie sprzęgał się neutrina:

$$\boldsymbol{W}_\mu = \sum_{k=1}^{3} W_\mu^k \tau^k = \begin{bmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W^3 \end{bmatrix}$$

i dalej

$$\tilde{D}_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu + i\frac{g'}{2}B_\mu + i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 & i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W_\mu^+ \\ i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W_\mu^- & \partial_\mu + i\frac{g'}{2}B_\mu - i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

Mamy

$$B = A\cos\theta_W - Z\sin\theta_W, \quad W^3 = Z\cos\theta_W + A\sin\theta_W$$

$$
\begin{aligned}
g'B + g_2 W^3 &= g'\left(A\cos\theta_W - Z\sin\theta_W\right) + g_2\left(Z\cos\theta_W + A\sin\theta_W\right) \\
&= A(\underbrace{g'\cos\theta_W + g_2\sin\theta_W}_{=0}) + Z(-g'\sin\theta_W + g_2\cos\theta_W)
\end{aligned}
$$

Czyli

$$\begin{gathered} g' \cos\theta_W = -g_2 \sin\theta_W = -e \\ g' = -g_2 \tan\theta_W \end{gathered}$$

i dalej

$$\begin{aligned} g'B + g_2 W^3 &= 0 + (-g' \sin\theta_W + g_2 \cos\theta_W) Z \\ &= g_2 \left(\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W} + \cos\theta_W \right) Z \\ &= \frac{g_2}{\cos\theta_W} Z \\ &= \frac{g_2 \sin\theta_W}{\cos\theta_W \sin\theta_W} Z \\ &= -\frac{2e}{\sin 2\theta_W} Z \end{aligned}$$

Mając

$$g' \cos\theta_W = -g_2 \sin\theta_W = -e$$
$$g' = -g_2 \tan\theta_W$$

policzmy dolny prawy róg

$$\begin{aligned}
g'B - g_2 W^3 &= g'\left(A\cos\theta_W - Z\sin\theta_W\right) - g_2\left(Z\cos\theta_W + A\sin\theta_W\right) \\
&= A\left(g'\cos\theta_W - g_2\sin\theta_W\right) - Z(g'\sin\theta_W + g_2\cos\theta_W) \\
&= -2eA - g_2\left(\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W} - \cos\theta_W\right) Z \\
&= -2eA + g_2 \frac{\cos 2\theta_W}{\cos\theta_W} Z \\
&= -2eA + g_2 \sin\theta_W \frac{\cos 2\theta_W}{\sin\theta_W \cos\theta_W} Z \\
&= -2eA - 2e \cot 2\theta_W Z
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\tilde{D}_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu - i\frac{e}{\sin 2\theta_W} Z_\mu & i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} W_\mu^+ \\ \\ i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} W_\mu^- & \partial_\mu - ieA_\mu - ie\cot 2\theta_W Z_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ \\ e_L \end{bmatrix}$$

Neutrino lewoskrętne nie sprzęga się do fotonu. Prawoskrętne też.

Pochodna kowariantna dla pól prawoskrętnych

Neutrino się nie sprzęga. Elektron prawoskretny jest singletem SU(2) więc sprzęga się tylko do pola U(1), tzn pola B_μ

$$
\begin{aligned}
\breve{D}_\mu e_R &= \left(\partial_\mu + i\frac{g''}{2} B_\mu\right) e_R \\
&= \left(\partial_\mu + i\frac{g''}{2} \left(A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu \sin\theta_W\right)\right) e_R
\end{aligned}
$$

Elektron ma ładunek $-e$, więc

$$
\frac{g''}{2}\cos\theta_W = -e \quad \Longrightarrow -\frac{g''}{2}\sin\theta_W = e\tan\theta_W
$$

i ostatecznie

$$
\breve{D}_\mu e_R = \left(\partial_\mu - ie\, A_\mu + ie\tan\theta_W\, Z_\mu\right) e_R
$$

Podsumowując:

$$g' \cos\theta_W = -g_2 \sin\theta_W = -e$$
$$g'' \cos\theta_W = -2e$$

Ponieważ z sektora Higgsa (wykład 9) mamy

$$e = g_2 \sin\theta_W = g_1 \cos\theta_W$$

zachodzi

$$g^{'} = -g_1, \quad g^{''} = -2g_1.$$

$$g^{'} = -g_1, \quad g^{''} = -2g_1.$$

Przypomnijmy sobie transformację dla pól Higgsa:

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x)\, \Phi$$

$$D'_\mu \Phi' = \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B'_\mu + i\frac{g_2}{2} \boldsymbol{W}'_\mu \right) \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x) D_\mu \Phi$$

Przez analogię mamy (transformacja U(1) ma inne fazy!!!)

$$L \longrightarrow L' = e^{i\theta(x)} U(x)\, L$$

$$e_R \longrightarrow e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R$$

a pochodne kowariantne

$$\tilde{D}'_\mu L' = \left(\partial_\mu - i\frac{g_1}{2} B'_\mu + i\frac{g_2}{2} \boldsymbol{W}'_\mu \right) L' = e^{i\theta(x)} U(x) \tilde{D}_\mu L$$

$$\breve{D}'_\mu e'_R = \left(\partial_\mu - i g_1 B'_\mu \right) e'_R = e^{i2\theta(x)} \breve{D}_\mu e_R$$

Lagrangian dla leptonów

Opuszczamy znaczki nad pochodnymi kowariantnymi, rozróżniamy je po polach, na które działają. Mamy reguły transformacji:

$$L \to L' = e^{i\theta(x)} U(x)\, L, \qquad\qquad e_R \to e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R$$

$$D_\mu L \to D'_\mu L' = e^{i\theta(x)} U(x) D_\mu L, \qquad D_\mu e_R \to D'_\mu e'_R = e^{i2\theta(x)} D_\mu e_R$$

Zatem niezmienniczy lagragian:

$$\mathcal{L}^e_{dyn} = L^\dagger i \tilde{\sigma}^\mu D_\mu L + e^\dagger_R i \sigma^\mu D_\mu e_R + \nu^\dagger_R i \sigma^\mu \partial_\mu \nu_R .$$

gdzie

$$D_\mu L \;=\; \begin{bmatrix} \partial_\mu - i\frac{e}{\sin 2\theta_W} Z_\mu & i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} W^+_\mu \\ i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} W^-_\mu & \partial_\mu - ieA_\mu - ie\cot 2\theta_W Z_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

$$D_\mu e_R \;=\; (\partial_\mu - ie\, A_\mu + ie \tan\theta_W\, Z_\mu)\, e_R$$

Człony masowe

Pamiętamy, że człon masowy ma postać

$$-m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$$

Tu nie da się go tak zapisać, bo pola lewe są dubletami, pola prawe singletami SU(2) i człon masowy nie byłby niezmienniczy. Ale można sprzęgać fermony do pól Higgsa.

Człony masowe

Prawa transformacji U(1)×SU(2):

$$\Phi \to \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x)\,\Phi, \qquad L \to L' = e^{i\theta(x)} U(x)\,L, \quad e_R \to e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R$$

Jakie mogą być człony niezmiennicze (SU(2)×U(1) i lorentzowskie):

$$L^\dagger \Phi \Longrightarrow \quad \text{niezmiennik SU(2), ale dostaje fazę U(1): } e^{-i2\theta(x)}$$

$$\left(L^\dagger \Phi\right) e_R \Longrightarrow \quad \text{niezmiennik SU(2)} \times \text{U(1)}$$

Zatem niezmienniczy lagrangian:

$$\mathcal{L}^e_{int} = -\lambda_e \left\{ \left(L^\dagger \Phi\right) e_R + e^\dagger_R \left(\Phi^\dagger L\right) \right\}$$

$$= -\lambda_e \left\{ \Phi_A \left(\nu^\dagger_{eL} e_R\right) + \Phi_B \left(e^\dagger_L e_R\right) + \Phi^\dagger_A \left(e^\dagger_R \nu_{eL}\right) + \Phi^\dagger_B \left(e^\dagger_R e_L\right) \right\}$$

gdzie użyliśmy

$$L = \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix}$$

Stała λ_e zwana sprzężeniem Yukawy jest *całkowicie dowolna.*

Człony masowe

$$\mathcal{L}^e_{int} = -\lambda_e \left\{ \Phi_A \left(\nu^\dagger_{eL} e_R \right) + \Phi_B \left(e^\dagger_L e_R \right) + \Phi^\dagger_A \left(e^\dagger_R \nu_{eL} \right) + \Phi^\dagger_B \left(e^\dagger_R e_L \right) \right\}$$

Ponieważ

$$\Phi_A = 0, \quad \Phi_B = \phi_0 + h(x)/\sqrt{2}$$

otrzymujemy człony masowe:

$$\mathcal{L}^e_{int} = -\lambda_e \phi_0 \left\{ \left(e^\dagger_L e_R \right) + \left(e^\dagger_R e_L \right) \right\} - \frac{\lambda_e \phi_0}{\sqrt{2}} h \left\{ \left(e^\dagger_L e_R \right) + \left(e^\dagger_R e_L \right) \right\}.$$

Masa elektronu

$$m_e = \lambda_e \phi_0, \quad \text{gdzie} \quad \phi_0 = 180 \text{ GeV}$$

$$\Longrightarrow \lambda_e \sim 10^{-6}$$

Dlaczego? Arbitralność sprzężeń Yukawy jest problemem w modelu standardowym.

Analogiczną konstrukcję powtarzamy dla μ i dla τ. Mamy

$$\lambda_e \sim 10^{-6}, \quad \lambda_\mu \sim 10^{-3}, \quad \lambda_\tau \sim 10^{-2}$$

Podsumujmy:

- Uniwersalność sprzężeń wynikająca z symetrii U(1)×SU(2)
- Łamanie symetrii U(1)×SU(2) dostarcza masę bozonom pośredniczącym i fermionom
- Złamana jest symetria $L \longleftrightarrow R$
- Prawoskrętne neutrina nie sprzęgają się do niczego
- Sprzężenia Yukawy są arbitralne (nie ma dla nich żadnej symetrii)
- Neutrina są ściśle bezmasowe (dziś obserwujemy oscylacje)
- Symetria – choć złamana – gwarantuje renormalizowalność

Pytanie: czy mechanizm Higgsa jest „realny", czy jest to efektywny opis czegoś bardziej skomplikowanego?

Model oddziaływań elektrosłabych oparty na złamanaj symetrii U(1)×SU(2) nosi nazwę modelu Weinberga-Salama (model standardowy).

Sprzężenie leptonów do bozonów $W^\pm$

$$L^\dagger i\tilde{\sigma}^\mu D_\mu L = \left[\, \nu_{eL}^\dagger \quad e_L^\dagger \,\right] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} i\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu - \frac{e}{\sin 2\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu Z_\mu & -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W_\mu^+ \\ -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W_\mu^- & i\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu + e\tilde{\sigma}^\mu A_\mu + e\cot 2\theta_W\tilde{\sigma}^\mu Z_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

gdzie

$$e = g_2 \sin\theta_W$$

czyli

$$\mathcal{L}_{eW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}[W_\mu^+ \left(\nu_L^\dagger\tilde{\sigma}^\mu e_L\right) + W_\mu^- \left(e_L^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\nu_L\right)]$$

Sprzężenie leptonów do bozonów $W^{\pm}$

$$L^{\dagger} i\tilde{\sigma}^{\mu} D_{\mu} L = \begin{bmatrix} \nu_{eL}^{\dagger} & e_L^{\dagger} \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} i\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} - \frac{e}{\sin 2\theta_W}\tilde{\sigma}^{\mu} Z_{\mu} & -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^{\mu} W_{\mu}^{+} \\ -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^{\mu} W_{\mu}^{-} & i\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} + e\tilde{\sigma}^{\mu} A_{\mu} + e\cot 2\theta_W \tilde{\sigma}^{\mu} Z_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

gdzie

$$e = g_2 \sin\theta_W$$

czyli

$$\mathcal{L}_{eW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}[W_{\mu}^{+} \underbrace{\left(\nu_{eL}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu} e_L\right)}_{j_e^{\mu\,\dagger}} + W_{\mu}^{-} \underbrace{\left(e_L^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{eL}\right)}_{j_e^{\mu}}]$$

Sprzężenie leptonów do bozonów $W^{\pm}$

Ogólnie

$$j^{\mu} = \left(e_L^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{eL} + \mu_L^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mu L} + \tau_L^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\tau L}\right)$$

$$\mathcal{L}_{lW} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\left[j^{\mu\,\dagger}W_{\mu}^{+} + j^{\mu}W_{\mu}^{-}\right]$$

Człon kinetyczny

$$\mathcal{L}_{dynW} = -\frac{1}{2}\left(\Delta_{\mu}^{*}W_{\nu}^{-} - \Delta_{\nu}^{*}W_{\mu}^{-}\right)\left(\Delta^{\mu}W^{+\,\nu} - \Delta^{\nu}W^{+\,\mu}\right) + M_W^2 W_{\mu}^{-}W^{+\,\mu} \sim M_W^2 W_{\mu}^{-}W^{+\,\mu}$$

czyli dla niskich energii gęstość funkcji Lagrange'a dla bozonów W można przybliżyć jako

$$\mathcal{L}_{W} \approx M_W^2 W_{\mu}^{-}W^{+\,\mu} - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\left[j^{\mu\,\dagger}W_{\mu}^{+} + j^{\mu}W_{\mu}^{-}\right]$$

Nie ma członu kinetycznego, nie ma propagacji. R. ruchu:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_{\mu}} = \partial_{\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}W_{\mu})} = 0$$

Mamy więc dwa równania

$$M_W^2 W^{+\,\mu} = \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} j^\mu, \qquad M_W^2 W^{-\,\mu} = \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} j^{\mu\,\dagger}$$

Podstawiając to do lagrangianu :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_W &= M_W^2 W_\mu^- W^{+\,\mu} - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\left[j^{\mu\,\dagger} W_\mu^+ + j^\mu W_\mu^-\right] \\ &= -\frac{e^2}{2M_W^2\sin^2\theta_W} j^{\mu\,\dagger} j_\mu = -2\sqrt{2}G_F j^{\mu\,\dagger} j_\mu\end{aligned}$$

co pozwala wyliczyć stałą Fermiego

$$\begin{aligned}G_F &= \frac{e^2}{4\sqrt{2}M_W^2\sin^2\theta_W} \simeq 1.12\times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \\ G_F &= 1.16639\times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \quad (\mathrm{exp.}).\end{aligned}$$

Sprzężenie leptonów do bozonów Z^0

$$L^\dagger i\tilde{\sigma}^\mu D_\mu L = \left[\, \nu^\dagger_{eL} \quad e^\dagger_L \,\right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} i\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu - \frac{e}{\sin 2\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu Z_\mu & -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W^+_\mu \\ -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W^-_\mu & i\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu + e\tilde{\sigma}^\mu A_\mu + e\cot 2\theta_W\tilde{\sigma}^\mu Z_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

oraz

$$e^\dagger_R i\sigma^\mu D_\mu e_R = e^\dagger_R\sigma^\mu\left(i\partial_\mu + e\,A_\mu - e\tan\theta_W\,Z_\mu\right)e_R$$

czyli

$$\mathcal{L}_{eZ} = Z_\mu\left[-\frac{e}{\sin 2\theta_W}\left(\nu^\dagger_{eL}\tilde{\sigma}^\mu\nu_{eL}\right) + e\cot 2\theta_W\left(e^\dagger_L\tilde{\sigma}^\mu e_L\right) - e\tan\theta_W\left(e^\dagger_R\sigma^\mu e_R\right)\right]$$

$$= -\frac{e}{\sin 2\theta_W}Z_\mu\left[\left(\nu^\dagger_{eL}\tilde{\sigma}^\mu\nu_{eL}\right) - \cos 2\theta_W\left(e^\dagger_L\tilde{\sigma}^\mu e_L\right) + 2\sin^2\theta_W\left(e^\dagger_R\sigma^\mu e_R\right)\right]$$

i analogicznie dla μ oraz τ.

Definiuje się prąd neutralny:

$$j^{\mu}_{e\,\mathrm{neutral}} = \left(\nu^{\dagger}_{eL}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{eL}\right) - \cos 2\theta_W \left(e^{\dagger}_{L}\tilde{\sigma}^{\mu}e_{L}\right) + 2\sin^2\theta_W \ \left(e^{\dagger}_{R}\sigma^{\mu}e_{R}\right)$$

i podobnie dla innych leptonów. Wtedy

$$\mathcal{L}_{lZ} = -\frac{e}{\sin 2\theta_W} Z_{\nu} \left[j^{\nu}_{e\,\mathrm{neutral}} + j^{\nu}_{\mu\,\mathrm{neutral}} + j^{\nu}_{\tau\,\mathrm{neutral}}\right]$$

Czy jest różnica między lewym a prawym sprzężeniem Z?

$$\begin{aligned} g_L &= -\cos 2\theta_W = -\sin^2\theta_W + \cos^2\theta_W + \ \left\{\sin^2\theta_W - \sin^2\theta_W\right\} \\ &= 1 - 2\sin^2\theta_W = 0.537\ (0.555) \\ g_R &= 2\sin^2\theta_W = 0.463\ (0.445) \end{aligned}$$

dla $\sin^2\theta_W = 0.2315\ (0.2226)$. Asymetria lewo-prawo (spolaryzowane wiązki)

$$\begin{aligned} A_{LR} &= \frac{\sigma_L - \sigma_R}{\sigma_L + \sigma_R} = \frac{g_L^2 - g_R^2}{g_L^2 + g_R^2} = \frac{\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right)^2 - 4\sin^4\theta_W}{\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right)^2 + 4\sin^4\theta_W} \\ &= 2\frac{1 - 4\sin^2\theta_W}{1 + (1 - \sin^2\theta_W)^2} = 0.147\ (0.217)\ \ (\mathrm{exp.}(1994)\!:\ 0.1628) \end{aligned}$$

Symetria $\mathcal{CP}$

Parzystość – transformacja odbicia $\mathcal{P}$

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = -\vec{r}, \quad \vec{\nabla} \longrightarrow \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$$

Gęstość Lagrange'a pozozstaje niezmiennicza gdy

$$\psi_L(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \psi_L^{\mathcal{P}}(x') = \psi_R(x),$$
$$\psi_R(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \psi_R^{\mathcal{P}}(x') = \psi_L(x)$$

W oczywisty sposób model Weinberga-Salama nie jest niezmienniczy względem $\mathcal{P}$.

Sprzężenie ładunkowe $\mathcal{C}$

$$\psi_L^{\mathcal{C}} = -i\sigma^2\psi_R^*, \quad \psi_R^{\mathcal{C}} = +i\sigma^2\psi_L^*$$

Model WS jest niezmienniczy względem łącznej symetrii $\mathcal{CP}$ (patrz dyskusja eksperymentu p. Wu). Mamy

$$\psi_L^{\mathcal{CP}} = -i\sigma^2\psi_L^*, \quad \psi_R^{\mathcal{CP}} = +i\sigma^2\psi_R^*$$

Fermiony:

$$\psi_L^{\mathcal{CP}} = -i\sigma^2\psi_L^*, \quad \psi_R^{\mathcal{CP}} = +i\sigma^2\psi_R^*$$

Reguły transformacji pozostałych pól:

Pole skalarne:

$$\Phi^{\mathcal{CP}} = \begin{bmatrix} \Phi_A^{\mathcal{CP}} \\ \Phi_B^{\mathcal{CP}} \end{bmatrix} = \Phi^* = \begin{bmatrix} \Phi_A^* \\ \Phi_B^* \end{bmatrix}$$

Pole U(1):

$$B_0^{\mathcal{CP}} = -B_0, \quad \vec{B}^{\,\mathcal{CP}} = +\vec{B}$$

Pola SU(2):

$$\begin{bmatrix} W_0^3 & \sqrt{2}W_0^+ \\ \sqrt{2}W_0^- & -W_0^3 \end{bmatrix}^{\mathcal{CP}} = -\begin{bmatrix} W_0^3 & \sqrt{2}W_0^- \\ \sqrt{2}W_0^+ & -W_0^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{W}^3 & \sqrt{2}\vec{W}^{\,+} \\ \sqrt{2}\vec{W}^{\,-} & -\vec{W}^3 \end{bmatrix}^{\mathcal{CP}} = +\begin{bmatrix} \vec{W}^3 & \sqrt{2}\vec{W}^{\,-} \\ \sqrt{2}\vec{W}^{\,+} & -\vec{W}^3 \end{bmatrix}$$

Używając tych reguł zbadajmy wyrażenie

$$X = e_R^{\dagger} i \sigma^{\mu} \left(\partial_{\mu} - i g_1 B_{\mu}\right) e_R$$

Po transformacji $\mathcal{CP}$ mamy

$$X^{\mathcal{CP}} = -i e_R^T \sigma^2 \, i \left[\sigma^0 \left(\partial_0 + i g_1 B_0\right) + \sigma^k \left(-\partial_k - i g_1 B_k\right)\right] \, i \sigma^2 e_R^*.$$

Użyjemy tożsamości

$$\left(\sigma^2\right)^2 = 1, \; \sigma^2 \sigma^k \sigma^2 = -\left(\sigma^k\right)^T.$$

Rzeczywiście:

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \; \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\begin{gathered} \left(\sigma^{1,3}\right)^T = \sigma^{1,3}, \quad \sigma^2 \sigma^{1,3} \sigma^2 = -\sigma^{1,3} \left(\sigma^2\right)^2 = -\left(\sigma^{1,3}\right)^T \\ \left(\sigma^2\right)^T = -\sigma^2, \quad \sigma^2 \sigma^2 \sigma^2 = \sigma^2 = -\left(\sigma^2\right)^T. \end{gathered}$$

Zatem

$$X^{\mathcal{CP}} = -ie_R^T i \left[\sigma^2\sigma^0\sigma^2 \left(\partial_0 + ig_1 B_0\right) - \sigma^2\sigma^k\sigma^2 \left(\partial_k + ig_1 B_k\right)\right] ie_R^*.$$

Używając

$$\left(\sigma^2\right)^2 = 1,\ \sigma^2\sigma^k\sigma^2 = -\left(\sigma^k\right)^T$$

mamy

$$X^{\mathcal{CP}} = e_R^T i \left[\left(\sigma^0\right)^T \left(\partial_0 + ig_1 B_0\right) + \left(\sigma^k\right)^T \left(\partial_k + ig_1 B_k\right)\right] e_R^*$$
$$e_R^T i \left(\sigma^\mu\right)^T \left(\partial_\mu + ig_1 B_\mu\right) e_R^*$$

Mimo, że $X^{\mathcal{CP}}$ nie jest identyczne z X

$$X = e_R^\dagger i\sigma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1 B_\mu\right) e_R$$

to możemy wykonać całkę przez części i przestawić *antykomutujące* pola e_R:

$$X^{\mathcal{CP}} \Longrightarrow e_R^T i \left(\sigma^\mu\right)^T \left(-\overleftarrow{\partial}_\mu + ig_1 B_\mu\right) e_R^*$$
$$= e_R^\dagger i\sigma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1 B_\mu\right) e_R = X$$

W ten sposób można udowodnić symetrię pozostałych członów.

Zachowanie liczby leptonowej

Dodatkowa symetria globalna

$$L_e \longrightarrow e^{i\alpha} L_e, \; e_R \longrightarrow e^{i\alpha} e_R$$

Lagrangian

$$\mathcal{L}^e_{dyn} = L^\dagger_e i\tilde{\sigma}^\mu D_\mu L_e + e^\dagger_R i\sigma^\mu D_\mu e_R + \nu^\dagger_{eR} i\sigma^\mu \partial_\mu \nu_{eR}$$

jest niezmienniczy. Uzmienniając

$$\alpha \longrightarrow \alpha + \delta\alpha(x)$$

i żądając

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= i \int d^4x \left[L^\dagger_e \tilde{\sigma}^\mu L_e + e^\dagger_R i\sigma^\mu e_R \right] \partial_\mu \delta\alpha(x) \\ &= -i \int d^4x \partial_\mu \left[L^\dagger_e \tilde{\sigma}^\mu L_e + e^\dagger_R \sigma^\mu e_R \right] \delta\alpha(x). \end{aligned}$$

Mamy zachowany prąd

$$J^\mu_e = L^\dagger_e \tilde{\sigma}^\mu L_e + e^\dagger_R \sigma^\mu e_R$$

gdzie

$$\partial_\mu J_e^\mu = \frac{\partial J_e^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \int d^4x J_e^0 = 0$$

Analogicznie dla μ oraz τ.