

Przekrój czynny

Rozważmy proces

$$p_1 + p_2 \rightarrow p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n$$

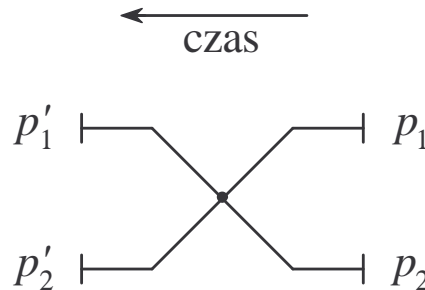
Przypomnijmy sobie, że dla teorii φ^4 w pierwszym rzędzie dla procesu $2 \rightarrow 2$

$$S_{fi}^{(1)} = -igN(p_1)N(p_2)N(p'_1)N(p'_2)(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2).$$

gdzie

$$N_p = \sqrt{\frac{1}{2VE_p}} \text{ lub dla fermionów } N_p = \sqrt{\frac{2m}{2VE_p}}$$

Diagram:

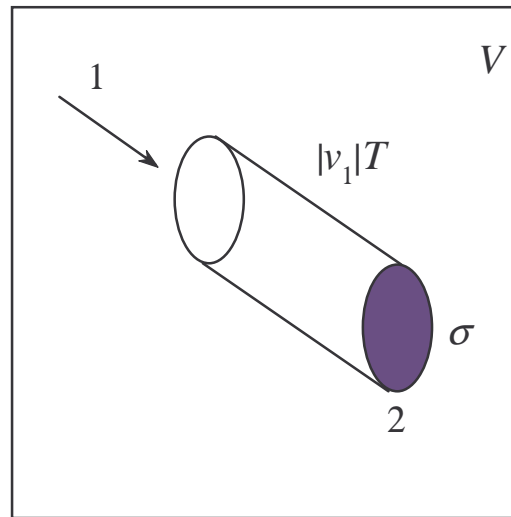


Łatwo się przekonać, że dla procesu $2 \rightarrow n$ zarówno δ zachowania jak i czynniki N_p są uniwersalne.

Definiujemy $S = 1 + iR$

$$R_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n p'_i) N(p_1) N(p_2) \prod_{i=1}^n N(p'_i) \times \mathcal{M}_{fi}$$

Cząstka 1 nadlatuje na spoczywającą cząstkę 2. Z cząstką 2 związany jest *efektywny* przekrój czynny σ na produkcję n cząstek. Jeśli cząstka 1 „trafi” w dysk o powierzchni σ to prawdopodobieństwo



$$\begin{aligned}
P_{1+2 \rightarrow n} &= \frac{|\vec{v}_1| T \sigma_{1+2 \rightarrow n}}{V} = \sum_{\substack{\text{polaryzacje} \\ \text{helicity}}} \sum_{p'_1 \dots p'_n} |\langle p'_1, \dots, p'_n | R | p_1, p_2 \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{V^{n+2}} \sum_{\substack{\text{polaryzacje} \\ \text{helicity}}} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{V}{2E'_i} \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \times \\
&\quad \times \left[(2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n p'_i \right) \right]^2
\end{aligned}$$

Co zrobić z δ^2 ? Użyjemy wzoru

$$\delta^4(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{ipx}$$

$$\delta^4(p) \delta^4(p) = \delta^4(p) \delta^4(0) = \delta^4(p) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x = \delta^4(p) \frac{VT}{(2\pi)^4}$$

zatem

$$\begin{aligned}
\sigma_{1+2 \rightarrow n} &= \frac{V}{|\vec{v}_1| T} P_{1+2 \rightarrow n} \\
&= \frac{V}{|\vec{v}_1| T V^2} \sum_{\substack{\text{polaryzacje} \\ \text{helicity}}} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \times \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n p'_i) \times VT
\end{aligned}$$

Czynniki V i T upraszczają się i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sigma_{1+2 \rightarrow n} &= \frac{1}{4E_1 E_2 |\vec{v}_1|} \sum_{\substack{\text{polaryzacje} \\ \text{helicity}}} \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \times \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n p'_i).
\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo rozpadu (decay rate)

Mamy $1 \rightarrow n$,

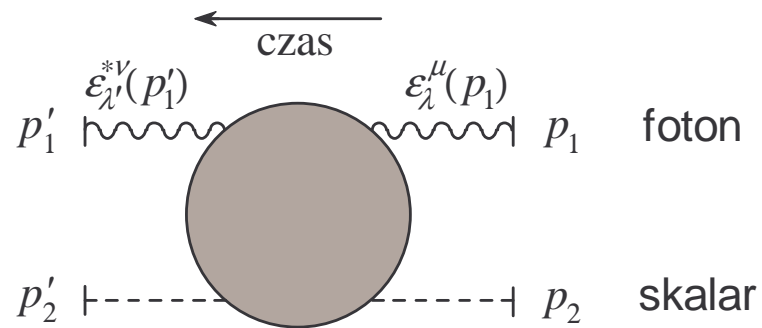
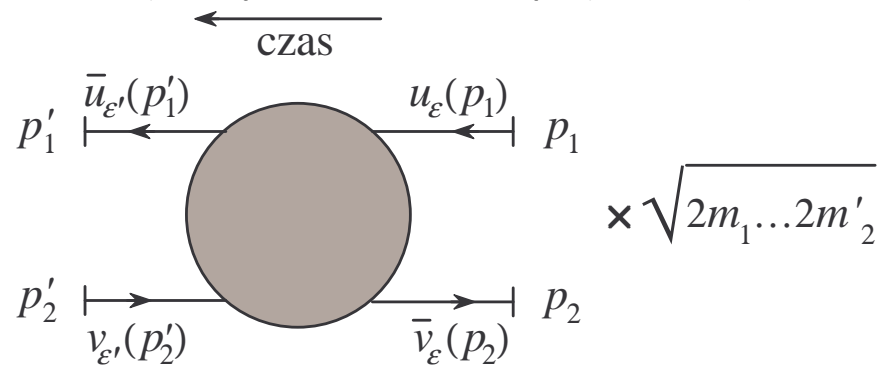
$$\begin{aligned}
 \Gamma_{1 \rightarrow n} &= \frac{\text{prawdopodobieństwo}}{\text{czas}} = \frac{P_{1 \rightarrow n}}{T} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{\substack{\text{polaryzacje} \\ \text{helicity}}} \sum_{p'_1 \dots p'_n} |\langle p'_1, \dots, p'_n | R | p \rangle|^2 \\
 &= \frac{1}{T} \frac{1}{2V E_p} \sum_{\substack{\text{polaryzacje} \\ \text{helicity}}} \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \times \\
 &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p - \sum_{i=1}^n p'_i) \times VT
 \end{aligned}$$

Czynniki VT upraszczają się:

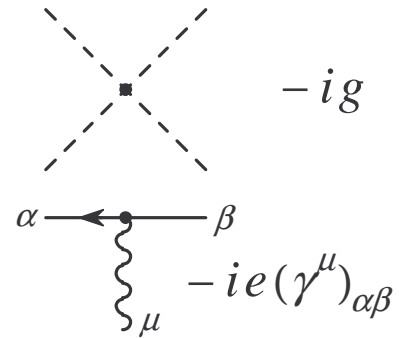
$$\Gamma_{1 \rightarrow n} = \sum_{\substack{\text{polaryzacje} \\ \text{helicity}}} \int \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2E_p} \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n p'_i)$$

Reguły Feynmana dla amplitudy \mathcal{M}


Każdej cząstce wchodzącej lub wychodzącej odpowiada:




Każde




Propagatory:

$$i\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$


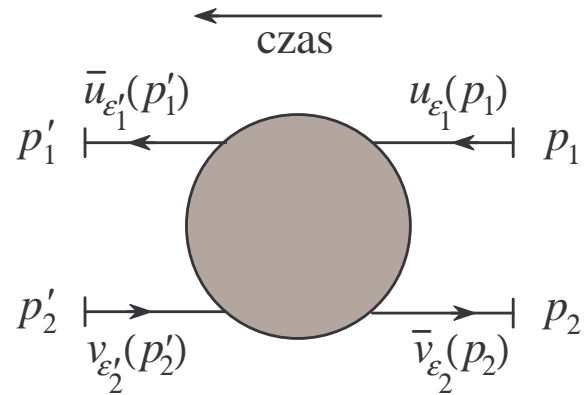
$$iS_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$


$$= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$iD_F(p)_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$


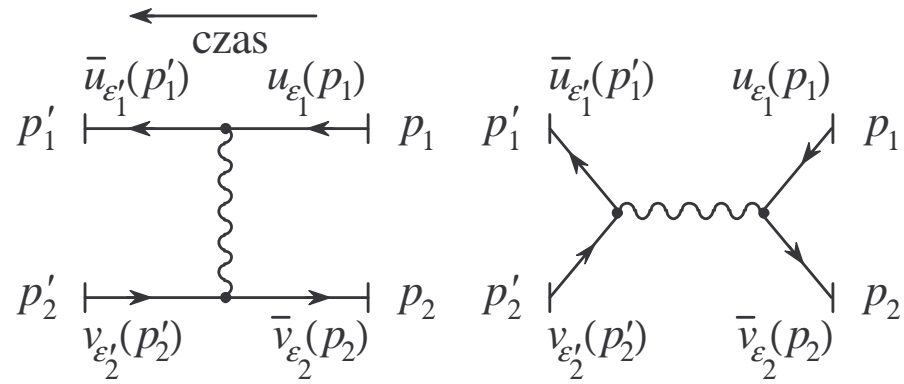
(cechowanie!)

Przykład: fermion+antyfermion (rozpraszanie Bhabha'y)

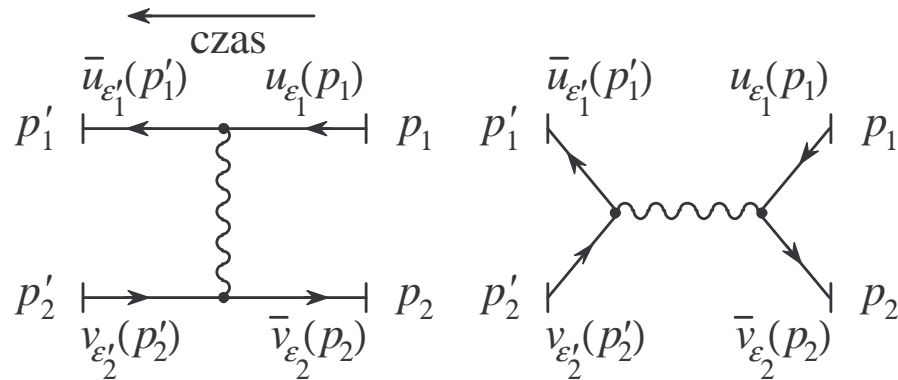


Nie wszystkie stany końcowe są możliwe!

Przykład: fermion+antyfermion (rozpraszanie Bhabha'y)



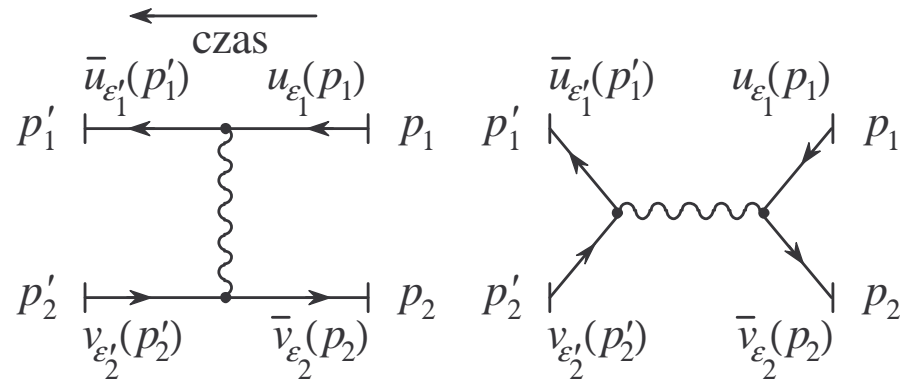
Przykład: fermion+antyfermion (rozpraszanie Bhabha'y)



Wyrażenie analityczne

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1 &= \bar{u}_{\varepsilon'_1}(p'_1)(-ie\gamma^\mu)u_{\varepsilon_1}(p_1) \\
 &\quad \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p'_1 - p_1)^2 + i\varepsilon} \\
 &(-)\bar{v}_{\varepsilon_2}(p_2)(-ie\gamma^\nu)v_{\varepsilon'_2}(p'_2) \\
 &= -\frac{ie^2}{(p'_1 - p_1)^2} \left[\bar{u}_{\varepsilon'_1}(p'_1)\gamma^\mu u_{\varepsilon_1}(p_1) \right] \left[\bar{v}_{\varepsilon_2}(p_2)\gamma_\mu v_{\varepsilon'_2}(p'_2) \right]
 \end{aligned}$$

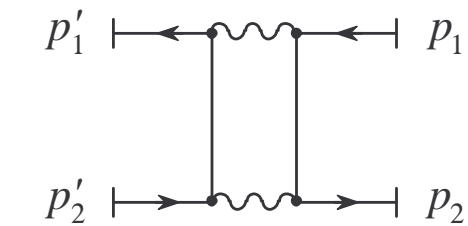
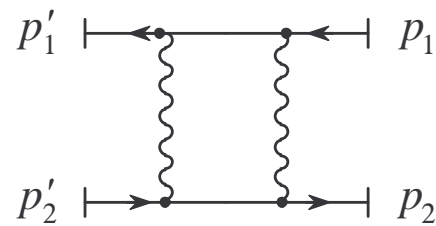
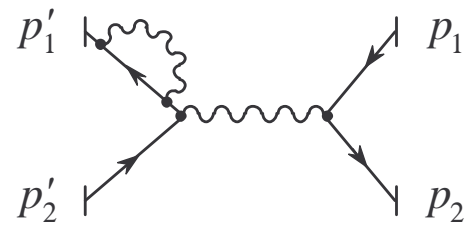
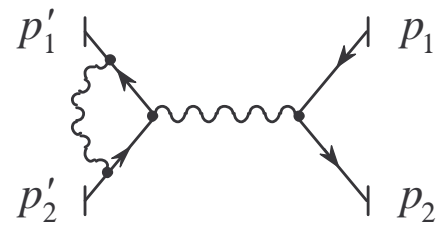
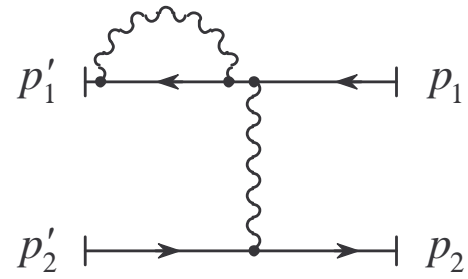
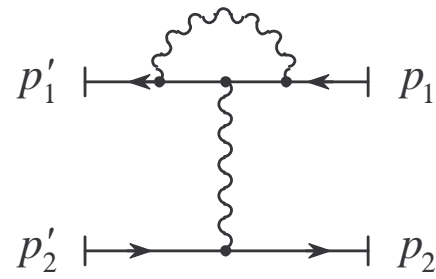
Przykład: fermion+antyfermion (rozpraszanie Bhabha'y)



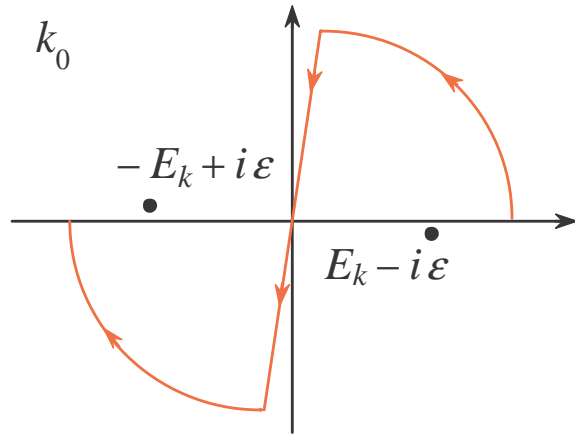
analogicznie

$$\mathcal{M}_2 = \frac{ie^2}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{u}_{\epsilon'_1}(p'_1) \gamma^\mu v_{\epsilon'_2}(p'_2) \right] \left[\bar{v}_{\epsilon_2}(p_2) \gamma_\mu u_{\epsilon_1}(p_1) \right]$$

Wyższe rzędy:



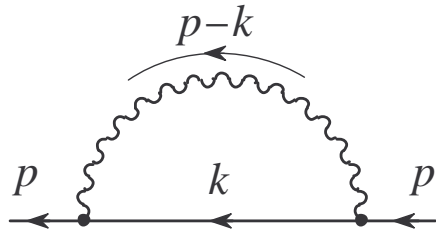
Obrót Wicka



Całkę po dk^0 zamieniamy na całkę po $-idk^4$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \int d^3\vec{k} f\left((k^0)^2 - \vec{k}^2\right) &\rightarrow -i \int dk^4 d^3\vec{k} f\left(- (k^4)^2 - \vec{k}^2\right) \\ &\rightarrow -i \int d^4k_E f\left(-\vec{k}_E^2\right) \end{aligned}$$

Renormalizacja

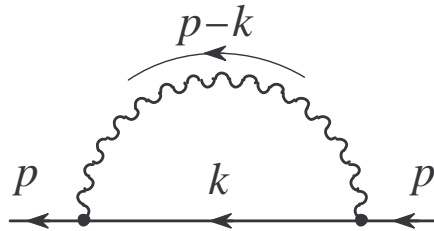


Mamy

$$\Sigma \sim g^2 \int dk^0 d^3 \vec{k} \frac{\gamma_\mu (p^\mu + k^\mu) + m}{(k^2 - m^2)(p+k)^2} \xrightarrow[\text{obrót Wicka}]{k \rightarrow \infty} g^2 \int k^3 dk \int d\Omega_k \frac{\gamma_\mu (p^\mu + k^\mu) + m}{k^4}$$

$$\sim (\gamma_\mu p^\mu + m) g^2 \int \frac{dk}{k} \leftarrow \text{rozbieżność logarytmiczna w górnej granicy całkowania}$$

Renormalizacja



Mamy

$$\Sigma \sim g^2 \int dk^0 d^3 \vec{k} \frac{\gamma_\mu (p^\mu + k^\mu) + m}{(k^2 - m^2)(p+k)^2} \xrightarrow[\text{obrót Wicka}]{k \rightarrow \infty} g^2 \int k^3 dk \int d\Omega_k \frac{\gamma_\mu (p^\mu + k^\mu) + m}{k^4}$$

$$\sim (\gamma_\mu p^\mu + m) \underbrace{g^2 \int \frac{dk}{k}}_{\text{skończone}} \leftarrow \text{rozbieżność logarytmiczna w górnej granicy całkowania}$$

Renormalizacja

Najpierw trzeba dokonać regularyzacji.

- Obcięcie czterowymiarowe ($\Lambda \rightarrow \infty$)

$$\underbrace{g^2 \int \frac{dk}{k}}_{\text{skończone}} \rightarrow g_\Lambda^2 \int \frac{dk}{k} = g_\Lambda^2 \ln \Lambda + \text{skończone}$$

- Regularyzacja wymiarowa ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\underbrace{g^2 \int \frac{dk}{k}}_{\text{skończone}} \rightarrow g_\varepsilon^2 \int k^{-\varepsilon} \frac{dk}{k} = g_\varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon} k^{-\varepsilon} \Big|_{\text{skończone}}^\infty \rightarrow -g_\varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon} \times \text{skończone}$$

Renormalizacja polega na *wepchnięciu* nieskończoności do

- stałej sprzężenia,
- mas cząstek,
- funkcji falowych.

Renormalizacja

Jeśli tylko skończona liczba typów rozbieżności się pojawia, która się daje usunąć w ten sposób, to mówimy, że teoria jest *renormalizowalna*.

Nawet jeżeli w teorii nie było stałej wymiarowej (wszystkie masy kładziemy zero, stała sprzężenia jest bezwymiarowa), to renormalizacja wprowadza zależność stałej sprzężenia od pewnej stałej wymiarowej. Najlepiej widać to na przykładzie obciążenia:

$$g_{\Lambda}^2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} = g^2(\mu) \leftarrow \text{skończone, ale zależy od } \mu$$

Trzeba podać, ile liczbowo wynosi $g^2(\mu)$ przy danym μ (pomiar). Np. wartość ładunku elektrycznego mierzona jest przy $\mu = 0$. Niestety, w innych teoriach stała sprzężenia może zmierzać do ∞ gdy $\mu \rightarrow 0$ i mamy problem: nie stosuje się rachunek zaburzeń.

Szczęśliwie w takich teoriach

$$g^2(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad \mu \rightarrow \infty$$

asymptotyczna swoboda.

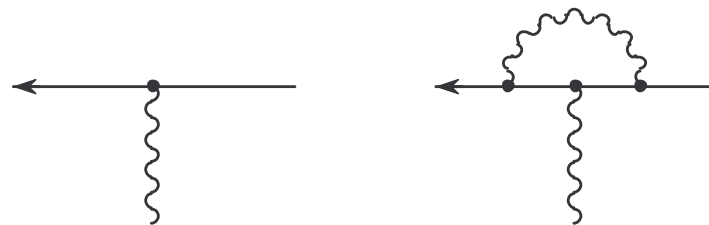
Moment magnetyczny elektronu I

Wyprowadziliśmy nierelatywistyczne przybliżenie równania Diraka:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[\frac{(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2}{2m} - \frac{q}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} + q\Phi \right] \phi$$

dla elektronu $q = -e$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \quad \text{magneton Bohra}$$



Wyższe poprawki modyfikują ten wynik

$$\mu_e = \mu_B \left(1 + \underbrace{\alpha C_1 + \alpha^2 C_2 + \dots}_{=a} \right)$$

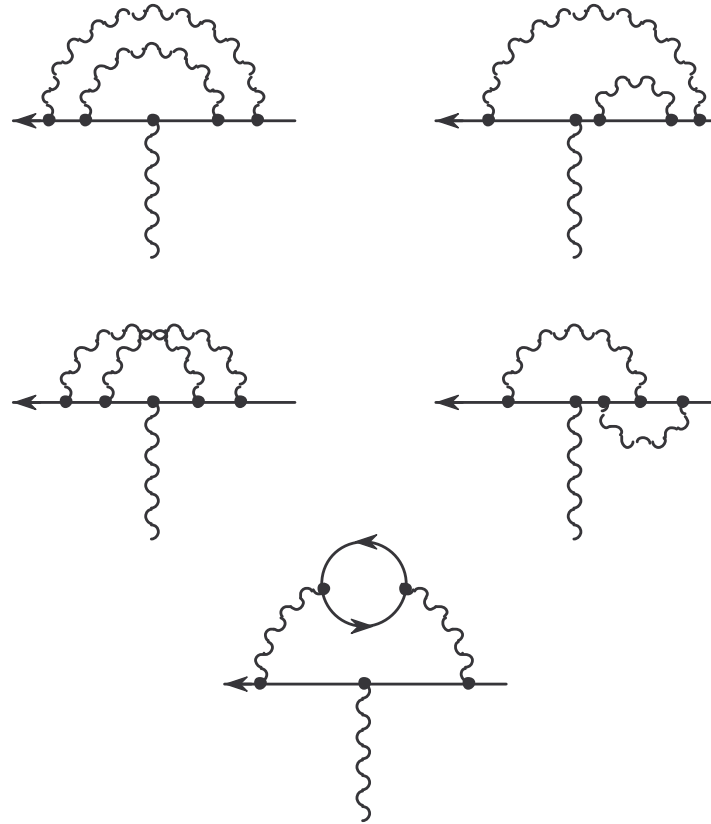
gdzie

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

Diagramy dają

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \rightarrow \alpha C_1 = 0.001\ 161\ 409\ 74$$

Moment magnetyczny elektronu II



Drugi rząd daje

$$C_2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{197}{144} + \frac{3}{4} \zeta(3) \right) - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{12}$$

co daje

$$\alpha^2 C_2 = 1.7723 \times 10^{-6}$$

i w rezultacie (łącznie z wyższymi rzędami do C_4):

$$a = 0.001\ 159\ 652\ 140\ \dots$$

w znakomitej zgodzie z doświadczeniem.

Dla muonu jest jeszcze ciekawiej.....