

Obraz oddziaływania

W obrazie Schrödingera stany ewoluują, operatory nie.

$$H^S = H_0^S + H_1^S$$
$$i\partial_t |\alpha(t)\rangle^S = H^S |\alpha(t)\rangle^S$$

Definiujemy operatory w obrazie oddziaływania (interakcji, Tomonagi):

$$O^I(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t}, \quad (H_0^I = H_0^S = H_0)$$
$$|\alpha(t)\rangle^I = e^{iH_0^S t} |\alpha(t)\rangle^S.$$

Równanie Schrödingera:

$$\begin{aligned} i\partial_t |\alpha(t)\rangle^I &= -H_0^S e^{iH_0^S t} |\alpha(t)\rangle^S + e^{iH_0^S t} i\partial_t |\alpha(t)\rangle^S \\ &= -H_0^S |\alpha(t)\rangle^I + e^{iH_0^S t} \underbrace{H^S e^{-iH_0^S t} e^{iH_0^S t}}_{=1} |\alpha(t)\rangle^S \\ &= (-H_0^I + H^I) |\alpha(t)\rangle^I = H_1^I |\alpha(t)\rangle^I. \end{aligned}$$

Równanie na operatory:

$$\begin{aligned} i\partial_t O^I(t) &= i\partial_t \left(e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} \right) = -H_0^S O^I(t) + O^I(t) H_0^S \\ &= [O^I(t), H_0^I] \end{aligned}$$

W zasadzie operatory pola są naturalnie napisane w obrazie oddziaływania:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \underbrace{e^{-iE_p t} a_{\vec{p}}}_{a_{\vec{p}}^I(t)} + e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \underbrace{e^{iE_p t} a_{\vec{p}}^\dagger}_{a_{\vec{p}}^{\dagger I}(t)} \right)$$

Rzeczywiście ($a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}^S$)

$$\begin{aligned} i\partial_t a_{\vec{p}}^I(t) &= [a_{\vec{p}}^I(t), H_0^I] = e^{iH_0^S t} [a_{\vec{p}}^S, H_0^S] e^{-iH_0^S t} \\ &= e^{iH_0^S t} \sum_{\vec{q}} E_q [a_{\vec{p}}^S, a_{\vec{q}}^{S\dagger} a_{\vec{q}}^S] e^{-iH_0^S t}. \end{aligned}$$

Komutator

$$\left[a_{\vec{p}}^S, a_{\vec{q}}^{S\dagger} a_{\vec{q}}^S \right] = a_{\vec{q}}^{S\dagger} \underbrace{\left[a_{\vec{p}}^S, a_{\vec{q}}^S \right]}_{=0} + \underbrace{\left[a_{\vec{p}}^S, a_{\vec{q}}^{S\dagger} \right]}_{=\delta_{\vec{p}\vec{q}}} a_{\vec{q}}^S$$

i w konsekwencji:

$$\begin{aligned} i\partial_t a_{\vec{p}}^I(t) &= E_p e^{iH_0^S t} a_{\vec{p}}^S e^{-iH_0^S t} = E_p a_{\vec{p}}^I(t) \\ a_{\vec{p}}^I(t) &= e^{-iE_p t} a_{\vec{p}}^S \end{aligned}$$

Operator ewolucji

$$|\alpha(t)\rangle^I = U^I(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle^I$$

$$i\partial_t U^I(t, t_0) = H_1^I(t) U^I(t, t_0).$$

Warunek początkowy

$$U^I(t_0, t_0) = 1.$$

Ponieważ

$$[H_1^I(t), H_1^I(t')] \neq 0$$

rozwiązanie nie jest zwykłą eksponentą. Równanie różniczkowe przepisujemy w postaci całkowej

$$U^I(t, t_0) = \mathbf{1} + (-i) \int_{t_0}^t H_1^I(t') U^I(t', t_0) dt'.$$

Rzeczywiście

$$i\partial_t U^I(t, t_0) = (-i)i\partial_t \int_{t_0}^t H_1^I(t') U^I(t', t_0) dt' = H_1^I(t) U^I(t, t_0).$$

Równanie całkowe można rozwiązać iteracyjnie (rachunek zaburzeń):

$$U^I(t, t_0) = \mathbf{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_1^I(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t') H_1^I(t'') + \dots$$

Wprowadźmy uporządkowanie czasowe

$$T(H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \dots H_1^I(t_n)) = H_1^I(t_{i_1}) H_1^I(t_{i_2}) \dots H_1^I(t_{i_n})$$

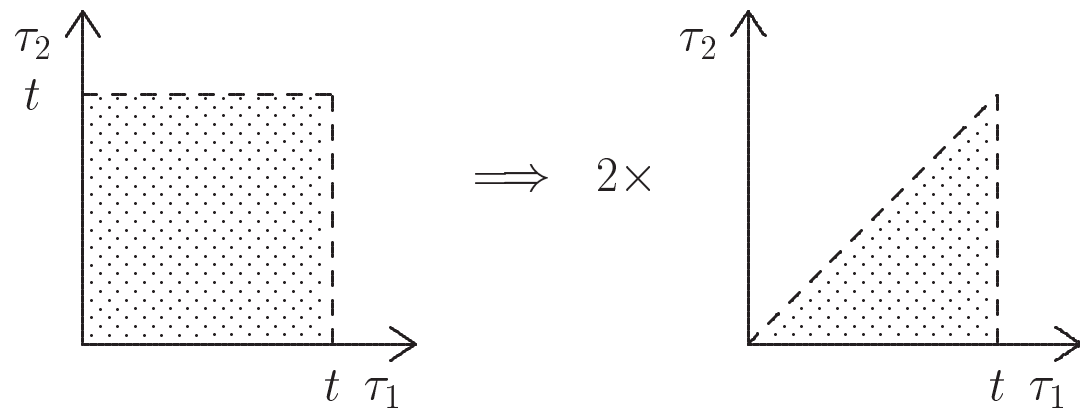
gdzie $t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \dots \geq t_{i_n}$

Wówczas

$$\int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t') H_1^I(t'') = \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' T(H_1^I(t') H_1^I(t'')).$$

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' T(H_1^I(t') H_1^I(t'')) \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t') H_1^I(t'') + \int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' H_1^I(t'') H_1^I(t') \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t') H_1^I(t'') + \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' H_1^I(t'') H_1^I(t') \right) \\
&= \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1^I(t') H_1^I(t'')
\end{aligned}$$



To się uogólnia na wyższe potęgi. Ostatecznie mamy

$$U^I(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_1^I(t')} = T e^{-i \int_{t_0}^t d^4x' \mathcal{H}_1^I(x')}$$

gdzie $\mathcal{H}_1^I(x')$ jest gęstością hamiltonianu oddziaływania w obrazie interakcji.

Od tej pory opuszczamy wskaźnik "I".

Macierz S

Macierz rozpraszania (scattering matrix). W dalekiej przeszłości przygotowujemy swobodny stan $|i\rangle$ (od "initial"), który w czasie ewolucji do chwili t zamienił się w stan ψ :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)\rangle = |i\rangle.$$

Pytamy jaka jest amplituda prawdopodobieństwa, że w dalekiej przyszłości otrzymamy stan $|f\rangle$ (od "final"):

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle f | \psi(t) \rangle = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \langle f | U(t_2, t_1) | i \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \langle f | S | i \rangle$$

lub

$$S = U(\infty, -\infty).$$

Ponieważ ewolucja zachowuje normę stanu

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle \\ \langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle &= \langle \alpha(t_0) | \underbrace{U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0)}_{=1} | \alpha(t_0) \rangle = \langle \alpha(t_0) | \alpha(t_0) \rangle \end{aligned}$$

Operator U jest unitarny, więc S jest też unitarny. Formalnie

$$S = T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_1(x)}.$$

Jak wyglądają stany $|i\rangle$ oraz $|f\rangle$? Stan $|i\rangle$ jest w gestii eksperymentatora, typowo mamy dwie nieoddziaływujące cząstki o zadanych czteropędach:

$$|i\rangle = |p_1, p_2\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle$$

dodatkowo możemy mieć jeszcze określone polaryzacje lub helicity. Stan końcowy to określona liczba cząstek (takich samych lub innych niż cząstki padające, np. elektron+pozyton \rightarrow dwa fotony) o zadanych czteropędach

$$|f\rangle = |p'_1, p'_2 \dots p'_n\rangle = a_{\vec{p}'_1}^\dagger a_{\vec{p}'_2}^\dagger \dots a_{\vec{p}'_n}^\dagger |0\rangle.$$

Dla wszystkich cząstek wchodzących i wychodzących zachodzi

$$E_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

są one na powłoce masy (on mass shell).

Reguły Feynmana: prosty przykład teoria φ^4

Mamy:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) - \frac{g}{4!} \varphi^4, \\ \mathcal{H} &= T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \partial \dot{\varphi} - \mathcal{L}, \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} (\partial_t \varphi^2 + \vec{\nabla} \varphi^2 + m^2 \varphi^2) + \frac{g}{4!} \varphi^4 \\ \mathcal{H}_1 &= \frac{g}{4!} \varphi^4.\end{aligned}$$

Operator $S = T e^{-i \int d^4 x \mathcal{H}_1(x)}$:

$$\begin{aligned}S &= \mathbf{1} + (-i) \frac{g}{4!} \int d^4 x : \varphi^4(x) : \\ &+ \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{g}{4!} \right)^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 T (: \varphi^4(x_1) :: \varphi^4(x_2) :) + \dots\end{aligned}$$

Operatory pola:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} a_{\vec{p}} + e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} a_{\vec{p}}^\dagger \right) \\ &= \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x),\end{aligned}$$

gdzie

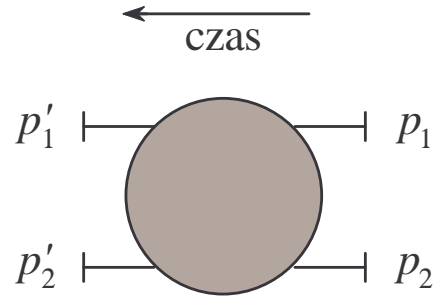
$$\begin{aligned}\varphi^{(+)}(x) &\rightarrow \text{zawiera } e^{-ipx} a_{\vec{p}}, && \text{anihilacja} \\ \varphi^{(-)}(x) &\rightarrow \text{zawiera } e^{+ipx} a_{\vec{p}}^\dagger, && \text{kreacja.}\end{aligned}$$

Wybierzmy:

$$|i\rangle = |p_1, p_2\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle,$$

$$|f\rangle = |p'_1, p'_2\rangle = a_{\vec{p}'_1}^\dagger a_{\vec{p}'_2}^\dagger |0\rangle,$$

$$\langle f| = \langle p'_1, p'_2| = \langle 0| a_{\vec{p}'_2} a_{\vec{p}'_1}.$$



$$\langle p'_1, p'_2 | S | p_1, p_2 \rangle = \langle p'_1, p'_2 | T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_1(x)} | p_1, p_2 \rangle$$

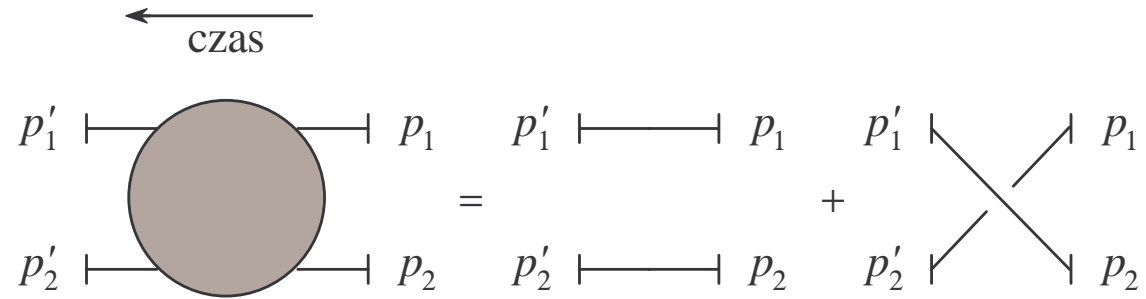
Rząd zerowy

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(0)} &= \langle f | \mathbf{1} | i \rangle = \langle p'_1, p'_2 | \mathbf{1} | p_1, p_2 \rangle = \langle 0 | a_{\vec{p}'_2} a_{\vec{p}'_1} a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | a_{\vec{p}'_2} \left(\delta_{\vec{p}_1 \vec{p}'_1} + a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}'_1} \right) a_{\vec{p}'_2}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \delta_{\vec{p}_1 \vec{p}'_1} \langle 0 | a_{\vec{p}'_2} a_{\vec{p}'_2}^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | a_{\vec{p}'_2} a_{\vec{p}'_1}^\dagger a_{\vec{p}'_1} a_{\vec{p}'_2}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \delta_{\vec{p}_1 \vec{p}'_1} \langle 0 | \delta_{\vec{p}_2 \vec{p}'_2} + \underbrace{a_{\vec{p}_2}^\dagger a_{\vec{p}'_2}}_{\text{daje zero}} | 0 \rangle + \langle 0 | (\delta_{\vec{p}_1 \vec{p}'_2} + \underbrace{a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}'_2}}_{\text{daje zero}}) (\delta_{\vec{p}_2 \vec{p}'_1} + \underbrace{a_{\vec{p}_2}^\dagger a_{\vec{p}'_1}}_{\text{daje zero}}) | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

A zatem:

$$S_{fi}^{(0)} = \delta_{\vec{p}_1 \vec{p}'_1} \delta_{\vec{p}_2 \vec{p}'_2} + \delta_{\vec{p}_1 \vec{p}'_2} \delta_{\vec{p}_2 \vec{p}'_1}$$

Nie zaszło żadne oddziaływanie. Takie przyczynki do macierzy S odrzucamy (tzw. diagramy rozłączne – *disconnected*).



$$\mathcal{S}_{fi}^{(0)} = \langle f | \mathbf{1} | i \rangle = \langle p'_1, p'_2 | \mathbf{1} | p_1, p_2 \rangle = \delta_{\vec{p}_1 \vec{p}'_1} \delta_{\vec{p}_2 \vec{p}'_2} + \delta_{\vec{p}_1 \vec{p}'_2} \delta_{\vec{p}_2 \vec{p}'_1}$$

Pierwszy rząd

$$S = \mathbf{1} + (-i) \frac{g}{4!} \int d^4x : \varphi^4(x) : \quad \longleftarrow \quad \text{można opuścić } T$$

$$+ \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{g}{4!} \right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 T(: \varphi^4(x_1) :: \varphi^4(x_2) :) + \dots$$

Policzmy $S^{(1)}$

$$S^{(1)} = (-i) \frac{g}{4!} \int d^4x : \varphi^4(x) :$$

Interesuje nas element macierzowy

$$S_{fi}^{(1)} = \langle p'_1, p'_2 | S^{(1)} | p_1, p_2 \rangle = (-i) \frac{g}{4!} \int d^4x \langle 0 | a_{\vec{p}'_2} a_{\vec{p}'_1} : \varphi^4(x) : a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}, t) &= \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \\ \varphi^{(+)}(x) &\rightarrow \text{zawiera } e^{-ipx} a_{\vec{p}}, \quad \text{anihilacja} \\ \varphi^{(-)}(x) &\rightarrow \text{zawiera } e^{+ipx} a_{\vec{p}}^{\dagger}, \quad \text{kreacja.}\end{aligned}$$

Uporządkowanie normalne:

$$:\varphi^4 := \varphi^{(-)4} + 4\varphi^{(-)3}\varphi^{(+)} + 6\varphi^{(-)2}\varphi^{(+)^2} + 4\varphi^{(-)}\varphi^{(+)^3} + \varphi^{(+)^4}.$$

Ponieważ stan początkowy zawiera 2 cząstki, potrzebujemy dwa operatory anihilacji z $S^{(1)}$, a ponieważ stan końcowy zawiera też 2 cząstki potrzebujemy też 2 operatory kreacji (które działają "w lewo" jako operatory anihilacji). Czyli przyczynek da tylko człon

$$6\varphi^{(-)2}\varphi^{(+)^2}.$$

Zatem, pamiętając że mamy periodyczne warunki przegowe: $q_x = 2\pi n_x/L$ i.t.d.

$$S_{fi}^{(1)} = -i \frac{g}{4!} 6 \int d^4x \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4} e^{i(q_1+q_2-q_3-q_4)x} \left(\prod_{i=1}^4 \frac{1}{\sqrt{2V E_{q_i}}} \right)$$

$$\langle 0 | a_{\vec{p}'_2} a_{\vec{p}'_1} \underbrace{a_{\vec{q}_1}^\dagger a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_3} a_{\vec{q}_4}}_{\text{z operatora pola}} a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

Trzeba przekomutować operatory kreacji i anihilacji, tak by pozostały tylko $\delta_{\vec{p}\vec{q}}$. Gdyby gdzieś został wolny operator mamy zero.

$$\langle 0 | a_{\vec{p}_2'} \underline{a_{\vec{p}_1'} a_{\vec{q}_1}^\dagger} a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_3} \underline{a_{\vec{q}_4} a_{\vec{p}_1}^\dagger} a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | a_{\vec{p}_2'} \left(a_{\vec{q}_1}^\dagger a_{\vec{p}_1'} + \delta_{\vec{q}_1 \vec{p}_1'} \right) a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_3} \left(a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{q}_4} + \delta_{\vec{q}_4 \vec{p}_1} \right) a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

Popatrzmy najpierw na prawą stronę

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \dots a_{\vec{q}_3} \left(a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{q}_4} + \delta_{\vec{q}_4 \vec{p}_1} \right) a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \dots a_{\vec{q}_3} a_{\vec{p}_1}^\dagger \underline{a_{\vec{q}_4} a_{\vec{p}_2}^\dagger} | 0 \rangle + \delta_{\vec{q}_4 \vec{p}_1} \langle 0 | \dots \underline{a_{\vec{q}_3} a_{\vec{p}_2}^\dagger} | 0 \rangle \\ &= \delta_{\vec{q}_4 \vec{p}_2} \langle 0 | \dots \underline{a_{\vec{q}_3} a_{\vec{p}_1}^\dagger} | 0 \rangle + \delta_{\vec{q}_4 \vec{p}_1} \delta_{\vec{q}_3 \vec{p}_2} \langle 0 | \dots | 0 \rangle \\ &= \left(\delta_{\vec{q}_4 \vec{p}_2} \delta_{\vec{q}_3 \vec{p}_1} + \delta_{\vec{q}_4 \vec{p}_1} \delta_{\vec{q}_3 \vec{p}_2} \right) \langle 0 | \dots | 0 \rangle . \end{aligned}$$

Postępując analogicznie z lewą stroną mamy 4 człony

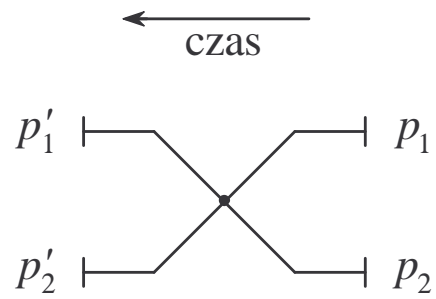
$$\langle 0 | a_{\vec{p}'_2} a_{\vec{p}'_1} a_{\vec{q}_1}^\dagger a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_3} a_{\vec{q}_4} a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle = \left(\delta_{\vec{q}_1 \vec{p}'_1} \delta_{\vec{q}_2 \vec{p}'_2} + \delta_{\vec{q}_1 \vec{p}'_2} \delta_{\vec{q}_2 \vec{p}'_1} \right) \left(\delta_{\vec{q}_3 \vec{p}_1} \delta_{\vec{q}_4 \vec{p}_2} + \delta_{\vec{q}_3 \vec{p}_2} \delta_{\vec{q}_4 \vec{p}_1} \right)$$

Mamy

$$S_{fi}^{(1)} = -i \frac{g}{4!} 6 \int d^4 x \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4} \left(\prod_{i=1}^4 \frac{1}{\sqrt{2V E_{q_i}}} \right) e^{i(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)x} \langle 0 | \dots | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= -i \frac{g}{4!} 6 \times 4 \int d^4 x \left(\prod_{i=1}^2 \frac{1}{2V \sqrt{E_{p_i} E_{p'_i}}} \right) e^{i(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)x} \\ &= -\frac{ig}{4V^2} \left(\prod_{i=1}^2 \frac{1}{\sqrt{E_{p_i} E_{p'_i}}} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2). \end{aligned}$$

Diagram:



Drugi rząd

$$S = \mathbf{1} + (-i)\frac{g}{4!} \int d^4x : \varphi^4(x) : \\ + \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{g}{4!}\right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 T(: \varphi^4(x_1) :: \varphi^4(x_2) :) + \dots$$

W drugim rzędzie mamy

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{1}{2!} \left(-\frac{ig}{4!}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \times \\ \times \langle 0 | a_{\vec{p}_2'} a_{\vec{p}_1'} T (: \varphi^4(x_1) :: \varphi^4(x_2) :) a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

Musimy umieć zapisać

$$T(: \varphi^4(x) :: \varphi^4(y) :) \rightarrow ?$$

Zwęzenie Wicka

Rozpatrzmy prostszy przypadek:

$$T(: \varphi(x)\varphi(y) :) = T(\varphi(x)\varphi(y))$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{1}{2E_p}} \left(e^{-ipx} a_{\vec{p}} + e^{ipx} a_{\vec{p}}^\dagger \right)$$

Policzmy dla $x_0 > y_0$

$$\begin{aligned} T(\varphi(x)\varphi(y))|_{x_0 > y_0} &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} \sqrt{\frac{1}{2E_p}} \sqrt{\frac{1}{2E_q}} \left(e^{-ipx} a_{\vec{p}} + e^{ipx} a_{\vec{p}}^\dagger \right) \left(e^{-iqy} a_{\vec{q}} + e^{iqy} a_{\vec{q}}^\dagger \right) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} \sqrt{\frac{1}{2E_p}} \sqrt{\frac{1}{2E_q}} \times \\ &\quad \left(e^{-ipx-iqy} a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} + e^{-ipx+iqy} a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger + e^{ipx-iqy} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} + e^{ipx+iqy} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \right) \end{aligned}$$

Chwemy to przepisać, tak by operatory anihilacji stały po prawej

$$a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger = \delta_{\vec{p}\vec{q}} + a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}}$$

co daje dla $x_0 > y_0$

$$T(\varphi(x)\varphi(y))|_{x_0 > y_0} =: \varphi(x)\varphi(y) : + \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)}.$$

Dla $y_0 > x_0$ wystarczy zamienić $x \longleftrightarrow y$

$$T(\varphi(x)\varphi(y))|_{y_0 > x_0} =: \varphi(x)\varphi(y) : + \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(y-x)}.$$

Używając

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}$$

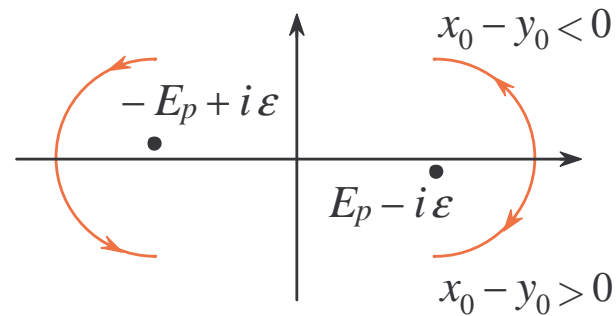
mamy

$$T(\varphi(x)\varphi(y)) =: \varphi(x)\varphi(y) : + \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p(2\pi)^3} \left(e^{-ip(x-y)} \theta(x_0 - y_0) + e^{-ip(y-x)} \theta(y_0 - x_0) \right)$$

gdzie $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Oznaczamy

$$i\Delta_F(x-y) = i \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p(2\pi)^3} \left(e^{-ip(x-y)} \theta(x_0 - y_0) + e^{-ip(y-x)} \theta(y_0 - x_0) \right)$$

Warto funkcje θ zastąpić trickiem wprowadzając całkę po dp^0 po konturze:



co daje (pokażemy to w drugą stronę)

$$\begin{aligned}
 i\Delta_F(x - y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &= i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \int_C dp^0 e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})}}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

Zajmijmy się całką po p^0 :

$$\int_C dp^0 e^{-ip^0(x^0-y^0)} \frac{1}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Mianownik można rozpisać:

$$(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon = (p^0 - \tilde{E}_p)(p^0 + \tilde{E}_p)$$

gdzie

$$\tilde{E}_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\varepsilon} = \sqrt{(\vec{p}^2 + m^2)(1 - i\varepsilon')} = E_p(1 - i\frac{1}{2}\varepsilon')$$

gdzie

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Ponieważ interesuje nas tylko **znak** ε' możemy opuścić dodatnie czynniki:

$$\tilde{E}_p = E_p - i\varepsilon.$$

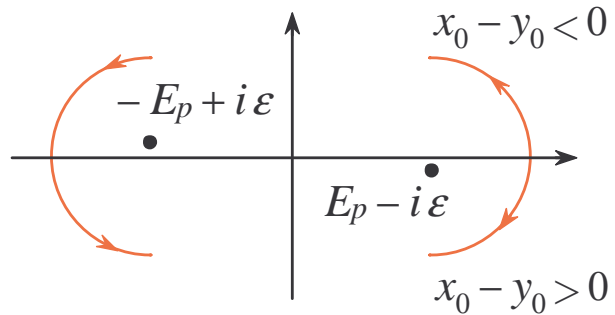
Stąd mianownik

$$\frac{1}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{(p^0 - E_p + i\varepsilon)(p^0 + E_p - i\varepsilon)}.$$

Wyrażenie to ma dwa bieguny

$$1) : p^0 = E_p - i\varepsilon, \quad 2) : p^0 = -E_p + i\varepsilon.$$

Gdy $(x_0 - y_0) > 0$ kontur domykamy u dołu i przyczynk daje biegun 1).
Dla $(y_0 - x_0) > 0$ przyczynk daje biegun 2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp^0 e^{-ip^0(x^0-y^0)} \frac{1}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon}$$


Mamy:

$$i\Delta_F(x - y) = (-2\pi i)i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \left[\theta(x_0 - y_0) \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2E_p} + \theta(y_0 - x_0) \frac{e^{iE_p(x^0-y^0)} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2E_p} \right].$$

W przypadku drugiej całki możemy zmienić zmienną całkowania $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ i mamy ostatecznie wyrażenie wyjściowe:

$$i\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p(2\pi)^3} \left[\theta(x_0 - y_0)e^{-ip(x-y)} + \theta(y_0 - x_0)e^{-ip(y-x)} \right].$$

Wyrażenie

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

wraz z przepisem na obchodzenie biegunów nazywamy propagatorem Feynmana dla pola skalarnego w przestrzeni pędów.

Pokazaliśmy najprostsz przykład twierdzenia Wicka:

$$T(\varphi(x)\varphi(y)) =: \varphi(x)\varphi(y) : + i\Delta_F(x - y)$$

Ten ostatni człon nazywa się zwężeniem Wicka:

$$\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = i\Delta_F(x - y).$$

Podobnie dla fotonu.

Jeśli pola nie zawierają niekomutujących operatorów, np. pole ψ :

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, \varepsilon = \pm} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(b_{\vec{p}\varepsilon} u_\varepsilon(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} + d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger v_\varepsilon(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} \right)$$

to

$$T(\psi(x)\psi(y)) =: \psi(x)\psi(y) :$$

$$T(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)) =: \bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y) :$$

ale

$$T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) =: \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)}$$

gdzie

$$\overline{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = iS_F(x-y)_{\alpha\beta} = i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{(p^\mu \gamma_\mu + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$i\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$



$$iS_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$



$$= \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}$$

$$iD_F(p)_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}$$



(cechowanie!)

Twierdzenie Wicka

Uporządkowanie czasowe iloczynu pól swobodnych jest równe sumie po wszystkich możliwych uporządkowanych normalnie iloczynach pól generowanych przez zwięzienia Wicka.

Przykład dla czterech pól skalarnych:

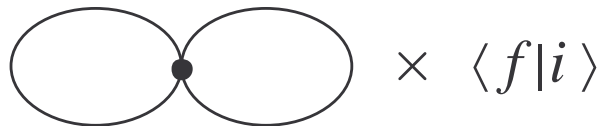
$$T(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4) = T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)) =: \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : \quad (1)$$

$$+ : \overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\varphi_4 : + : \overline{\varphi_1\varphi_3}\varphi_2\varphi_4 : + \dots + : \varphi_1\varphi_2\overline{\varphi_3\varphi_4} : \quad (2)$$

$$+ : \overline{\varphi_1\varphi_2}\overline{\varphi_3\varphi_4} : + : \overline{\varphi_1\varphi_3}\overline{\varphi_2\varphi_4} : + : \overline{\varphi_1\varphi_4}\overline{\varphi_2\varphi_3} : \quad (3)$$

Uwaga:

- przyczynek (3) jest liczbą, reprezentowaną przez diagram:



Nie daje on wkładu do amplitudy rozpraszania, gdyż nie jest diagram *connected*.

$$T(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4) = T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)) =: \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 : \quad (1)$$

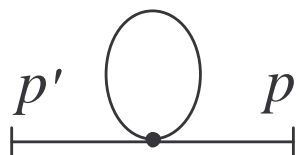
$$+ : \overline{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\varphi_4 : + : \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}\varphi_4 : + \dots + : \varphi_1\varphi_2\overline{\varphi_3\varphi_4} : \quad (2)$$

$$+ : \overline{\varphi_1\varphi_2}\overline{\varphi_3\varphi_4} : + : \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}\overline{\varphi_4} : + : \overline{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} : \quad (3)$$

- Jeżeli $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$, to mamy dyskutowany wcześniej pierwszy rząd rachunku zaburzeń. Do rozpraszania $p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2$ daje wkład przyczynek (1).
- Jeżeli jako stany początkowy i końcowy wybrać stany jednocząstkowe:

$$|i\rangle = |p\rangle, \quad |f\rangle = |p'\rangle$$

to mamy tylko wkład od przyczynków (2) reprezentowanych diagramem (poprawka wirtualna):



Drugi rząd w teorii φ^4

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{g}{4!}\right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \times \\ \langle p'_1, p'_2 | T(: \varphi^4(x_1) :: \varphi^4(x_2) :) | p_1, p_2 \rangle$$

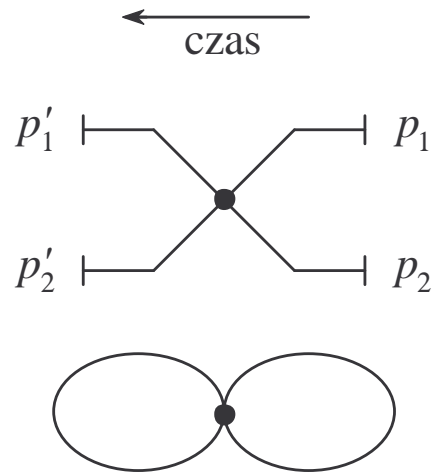
Aby element macierzowy między stanami dwucząstkowymi nie zniknął, muszą być cztery wolne operatory pola i dwa zwiężenia Wicka, które likwidują cztery operatory pola.

$$\langle p'_1, p'_2 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_1)\varphi(x_1)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_2)\varphi(x_2)\varphi(x_2)\varphi(x_2)) | p_1, p_2 \rangle$$

Są trzy typy diagramów:

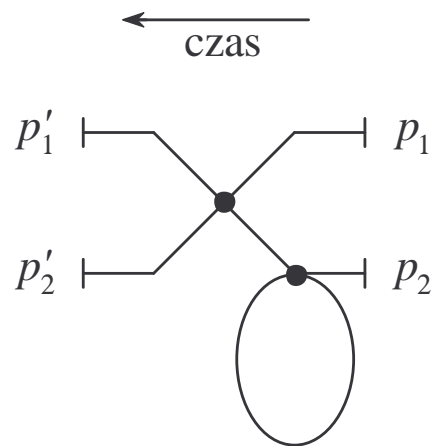
1. Oba zwiężenia w tym samym punkcie x_1 (diagram *disconnected*):

$$\overbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_1)} \overbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_1)} : \varphi^4(x_2) :$$



2. Jedno zwięźenie w tym samym punkcie x_1 , drugie między x_1 a x_2 (poprawka wirtualna + oddziaływanie):

$$\overbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_1)}\overbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_2)} : \varphi(x_1)\varphi^3(x_2) :$$



3. Oba zwiężenia między różnymi punktami (oddziaływanie):

$$\overbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_2)} : \varphi^2(x_1)\varphi^2(x_2) :$$

←
czas

