

Kwantowa teoria pola

Dotychczas wszystkie klasyczne pola kwantowe zapisywaliśmy jako sumę modów o określonym \vec{p} :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left(\frac{a_{\vec{p}}}{\sqrt{2\omega_p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} + \frac{b_{\vec{p}}^*}{\sqrt{2\omega_p}} e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} \right), \leftarrow \text{skalarne pole zespolone}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda=1,2} \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \left[\frac{a_{\vec{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \frac{a_{\vec{k}\lambda}^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right], \leftarrow \text{cechowanie Coul.}$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, \varepsilon=\pm} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(b_{\vec{p}\varepsilon} u_\varepsilon(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} + d_{\vec{p}\varepsilon}^* v_\varepsilon(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} \right). \leftarrow \text{fermiony}$$

gdzie ($\hbar = c = 1$):

$$E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad \omega_k = |\vec{k}|.$$

Kwantyzacja:

funkcje: $\Phi, \vec{A}, \psi \rightarrow$ operatory pola

stałe zespolone: $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}\lambda}, b_{\vec{p}\varepsilon} \dots \rightarrow$ operatory kreacji i anihilacji

energia: $\int d^3x T_0^0 \rightarrow$ hamiltonian

$\rightarrow \left| n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots \right\rangle$ przestrzeń Focka

Kwantowa teoria pola jest konsekwentnym uogólnieniem mechaniki kwantowej na przypadek relatywistyczny.

Rzeczywiste pole skalarne

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left(\frac{a_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_p}} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} + \frac{a_{\vec{p}}^\dagger}{\sqrt{2E_p}} e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} \right)$$

Relacje komutacji:

$$\left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger \right] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}, \quad \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'} \right] = \left[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger \right] = 0.$$

Przestrzeń stanów:

$$\underbrace{a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}}_{N_{\vec{p}}} |n\rangle = n |n\rangle, \quad a_{\vec{p}} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a_{\vec{p}}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

Hamiltonian

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p a_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}} \rightarrow \sum_{\vec{p}} E_p a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} = \sum_{\vec{p}} E_p N_{\vec{p}}$$

Niejednoznaczność:

$$a_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^* \rightarrow a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \neq a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger.$$

Spodziewalibyśmy się

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p \left(N_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right)$$

ale to daje nieskończoną energię (zero point energy). Uporządkowanie normalne: operatory anihilacji na prawo

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p : \left(N_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right) := \sum_{\vec{p}} E_p N_{\vec{p}}$$

Stan $|0\rangle$ – próżnia, $|1\rangle$ – jedna cząstka o pędzie \vec{p} , itd. Podobnie dla zespolonego pola skalarnego.

Fotony

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda=1,2} \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \left[\frac{a_{\vec{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \frac{a_{\vec{k}\lambda}^\dagger}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right]$$

Komutacja:

$$\left[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger \right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \left[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'} \right] = \left[a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger \right] = 0.$$

Energia

$$H = \sum_{\vec{k}, \lambda=1,2} a_{\vec{k}\lambda}^\dagger a_{\vec{k}\lambda} \omega_k = \sum_{\vec{k}, \lambda=1,2} N_{\vec{k}\lambda} \omega_k.$$

Pola fermionowe

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}, \varepsilon = \pm} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(b_{\vec{p}\varepsilon} u_\varepsilon(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} + d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger v_\varepsilon(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_p t)} \right)$$

Operatory

$b_{\vec{p}\varepsilon}$: anihiluje elektron o pędzie \vec{p} i helicity ε

$b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger$: kreuje elektron o pędzie \vec{p} i helicity ε

$d_{\vec{p}\varepsilon}$: anihiluje pozytron o pędzie \vec{p} i helicity ε

$d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger$: kreuje pozytron o pędzie \vec{p} i helicity ε

Relacje antykomutacji (pola fermionow antykomutują, zakaz Pauliego):

$$\left\{ b_{\vec{p}\varepsilon}, b_{\vec{p}'\varepsilon'}^\dagger \right\} = \left\{ d_{\vec{p}\varepsilon}, d_{\vec{p}'\varepsilon'}^\dagger \right\} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{\varepsilon\varepsilon'}$$

pozostałe zero, także mieszane

$$\left\{ b_{\vec{p}\varepsilon}, d_{\vec{p}'\varepsilon'}^\dagger \right\} = \left\{ d_{\vec{p}\varepsilon}, b_{\vec{p}'\varepsilon'}^\dagger \right\} = \left\{ b_{\vec{p}\varepsilon}, d_{\vec{p}'\varepsilon'} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger, d_{\vec{p}'\varepsilon'}^\dagger \right\} = 0.$$

Zakaz Pauliego

Operatory liczby cząstek

$$N_{\vec{p}\varepsilon}^{e^-} = b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger b_{\vec{p}\varepsilon}, \quad N_{\vec{p}\varepsilon}^{e^+} = d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger d_{\vec{p}\varepsilon}$$

mają dwie wartości własne: 0 i 1 (zakaz Pauliego). BOWIEM z reguł antykomutacji wynika, że

$$\begin{aligned} b_{\vec{p}\varepsilon} b_{\vec{p}\varepsilon} &= 0 = b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger \\ d_{\vec{p}\varepsilon} d_{\vec{p}\varepsilon} &= 0 = d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger. \end{aligned}$$

Oznaczając $\vec{p}\varepsilon = i$ mamy

$$\begin{aligned} N_i^2 &= N_i N_i = b_i^\dagger b_i b_i^\dagger b_i = b_i^\dagger (1 - b_i^\dagger b_i) b_i = N_i \\ N_i(N_i - 1) &= 0 \rightarrow N_i = 0 \quad \text{lub} \quad N_i = 1. \end{aligned}$$

Podobnie dla d_i .

Energia:

$$H = \sum_{\vec{p}, \varepsilon = \pm} (b_{\vec{p}\varepsilon}^* b_{\vec{p}\varepsilon} - d_{\vec{p}\varepsilon} d_{\vec{p}\varepsilon}^*) E_p$$

\Downarrow

$$H = \sum_{\vec{p}, \varepsilon = \pm} (b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger b_{\vec{p}\varepsilon} - d_{\vec{p}\varepsilon} d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger) E_p \quad \leftarrow \text{antykomutacja}$$

$$= \sum_{\vec{p}, \varepsilon = \pm} (b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger b_{\vec{p}\varepsilon} + d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger d_{\vec{p}\varepsilon} - 1) E_p \quad \leftarrow \text{odrzućenie drgań zerowych}$$

$$= \sum_{\vec{p}, \varepsilon = \pm} (b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger b_{\vec{p}\varepsilon} + d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger d_{\vec{p}\varepsilon}) E_p \quad \leftarrow \text{dodatnie!}$$

Pęd

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p}, \varepsilon = \pm} (b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger b_{\vec{p}\varepsilon} + d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger d_{\vec{p}\varepsilon}) \vec{p}$$

Operator liczby cząstek

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) &= \sum_{\vec{p}, \varepsilon = \pm} (b_{\vec{p}\varepsilon}^* b_{\vec{p}\varepsilon} + d_{\vec{p}\varepsilon} d_{\vec{p}\varepsilon}^*) \\ &\rightarrow \sum_{\vec{p}, \varepsilon = \pm} (b_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger b_{\vec{p}\varepsilon} - d_{\vec{p}\varepsilon}^\dagger d_{\vec{p}\varepsilon}). \end{aligned}$$

Zachowana jest liczba elektronów **minus** liczba pozytronów. Mogą powstawać pary e^+e^- .