Oddziaływanie – elektrodynamika

Prawa zachowania $\leftrightarrow$ symetrie gęstości Lagrange'a

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi$$

jest niezmienniczy względem **globalnej** transformacji U(1):

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x)$$

Dokonajmy wariacji

$$\alpha \longrightarrow \alpha'(x) = \alpha + \delta\alpha(x)$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left(e^{-i\alpha'(x)}\psi(x)\right) &= e^{-i\alpha'(x)}\partial_\mu\psi(x) + \psi(x)\partial_\mu e^{-i\alpha'(x)} \\
&= e^{-i\alpha'(x)}\partial_\mu\psi(x) - ie^{-i\alpha'(x)}\psi(x)\partial_\mu\left(\delta\alpha(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\delta S = S' - S = \int d^4x\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,\partial_\mu\left(\delta\alpha(x)\right) = -\int d^4x\,\partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\,\delta\alpha(x).$$

Stąd równanie ciągłości

$$\boxed{\partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\psi}\gamma^0\psi\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\overline{\psi}\vec{\gamma}\psi\right) = 0.}$$

Gęstość prawdopodobieństwa:

$$P = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{a=1}^{4} |\psi_a|^2$$

Prąd (a właściwie czterowektor gęstości prądu):

$$J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Minimalne sprzężenie

W mechanice klasycznej oddziaływanie z polem elektromegnetycznym wprowadzamy

$$E \longrightarrow E - q\Phi, \quad \vec{p} \longrightarrow \vec{p} - q\vec{A},$$

(dla elektronu $q = -e$). W mechanice kwantowej

$$i\partial^\mu \rightarrow iD^\mu = i\partial^\mu - qA^\mu = i\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \overline{\psi}\left(\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - qA_\mu\right) - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\ &= \overline{\psi}\left(\gamma^\mu i\partial_\mu - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (J^\mu + q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu\end{aligned}$$

Symetria wzgledem transformacji cechowania

$$\begin{aligned}A_\mu(x) &\longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x) \\ \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{-iq\chi(x)}\psi(x)\end{aligned}$$

Sprzężenie ładunkowe

Zamiana cząstki ($E > 0$) na antycząstkę ($E < 0$), także $q \to -q$:

$$e^{-iEt} \longrightarrow e^{+iEt} = \left(e^{-iEt}\right)^* .$$

$$\left(\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - qA_\mu\right) - m\right)\psi = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{sprzężenie zepolone}$$

$$\left(\gamma^{*\,\mu} \left(-i\partial_\mu - qA_\mu\right) - m\right)\psi^* = 0$$

Pamiętajmy (tylko σ^2 zawiera i)

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\gamma^{0,1,3})^* = \gamma^{0,1,3},$$
$$(\gamma^2)^* = -\gamma^2,$$
$$\text{a także } (\gamma^2)^T = \gamma^2, \text{ bo } \left(\sigma^i\right)^T = -\sigma^i.$$

Mamy

$$\gamma^2(\gamma^{0,1,3})^* = -\gamma^{0,1,3}\gamma^2,$$
$$\gamma^2(\gamma^2)^* = -\gamma^2\gamma^2,$$
$$\gamma^2(\gamma^\mu)^* = -\gamma^\mu\gamma^2.$$

i dalej

$$((\gamma^\mu)^* (-i\partial_\mu - qA_\mu) - m)\, \psi^* = 0 \quad \longleftarrow \gamma^2\times$$
$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu + qA_\mu) - m)\, \gamma^2\psi^* = 0 \quad \longleftarrow A^c = -A, \psi^c = -i\gamma^2\psi^*$$
$$\left(\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - qA^c_\mu\right) - m\right) \psi^c = 0$$

Wprowadziliśmy ($i-$ konwencja)

$$\psi^c = \underbrace{-i\gamma^2}_{\text{rzeczywiste}} \psi^*$$

lub

$$\psi_L^c = -i\sigma^2\psi_R^*, \quad \psi_R^c = +i\sigma^2\psi_L^*$$

Relacje odwrotne :

$$\psi^c = -i\gamma^2\psi^* \quad \longleftarrow -i\gamma^2 \times \dots \quad \left(\gamma^2\right)^2 = -1$$

$$\psi^* = -i\gamma^2\psi^c \quad \longleftarrow \; \dots^T \qquad \left(\gamma^2\right)^T = \gamma^2$$

$$\psi^\dagger = -i\left(\psi^c\right)^T\gamma^2$$

$$\psi^* = -i\gamma^2\psi^c \quad \longleftarrow \; \dots^* \qquad \left(-i\gamma^2\right)^* = -i\gamma^2$$

$$\psi = -i\gamma^2\left(\psi^c\right)^*$$

Relacje

$$\psi^\dagger = -i\left(\psi^c\right)^T\gamma^2 \qquad\qquad \psi = -i\gamma^2\left(\psi^c\right)^*$$

pozwalają wykazać, że gęstość Lagrange'a jest niezmiennicza, np:

$$\overline{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = -\left(\psi^c\right)^T\underbrace{\gamma^2\gamma^0\gamma^2}_{=\gamma^0}\left(\psi^c\right)^* = -\left(\psi^c\right)^T\gamma^0\left(\psi^c\right)^*$$

Rozpiszmy:

$$\overline{\psi}\psi = -\underbrace{\left(\psi^{cT}\right)_a\gamma^0_{ab}\left(\psi^c\right)^*_b}_{\text{przestawmy pola }\psi} = -\left(\psi^{cT}\right)^*_b\gamma^{0T}_{ba}\left(\psi^c\right)_a = -\left(\psi^c\right)^\dagger\gamma^0\psi^c = -\overline{\psi^c}\psi^c.$$

gdzie $\gamma^{0\,T} = \gamma^0$. **Zły znak!!!!!!!**

Relacje

$$\psi^\dagger = -i\left(\psi^c\right)^T\gamma^2 \qquad\qquad \psi = -i\gamma^2\left(\psi^c\right)^*$$

pozwalają wykazać, że gęstość Lagrange'a jest niezmiennicza, np:

$$\overline{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = -\left(\psi^c\right)^T\underbrace{\gamma^2\gamma^0\gamma^2}_{=\gamma^0}\left(\psi^c\right)^* = -\left(\psi^c\right)^T\gamma^0\left(\psi^c\right)^*$$

Rozpiszmy:

$$\overline{\psi}\psi = -\underbrace{\left(\psi^{cT}\right)_a\gamma^0_{ab}(\psi^c)^*_b}_{\text{przestawmy pola }\psi} = -\left(\psi^{cT}\right)^*_b\gamma^{0T}_{ba}\left(\psi^c\right)_a = -(\psi^c)^\dagger\gamma^0\psi^c = -\overline{\psi^c}\psi^c.$$

gdzie $\gamma^{0\,T} = \gamma^0$. **Zły znak!!!!!!!**

$$\overline{\psi}\psi = -\underbrace{\left(\psi^{cT}\right)_a\gamma^0_{ab}(\psi^c)^*_b}_{\text{przestawmy pola }\psi} = +\left(\psi^{cT}\right)^*_b\gamma^{0T}_{ba}\left(\psi^c\right)_a = +(\psi^c)^\dagger\gamma^0\psi^c = +\overline{\psi^c}\psi^c.$$

gdzie $\gamma^{0\,T} = \gamma^0$. **Pola ψ muszą antykomutować!!!!!!!!**

Oddziaływujące pole skalarne

Równanie Kleina-Gordona:

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi = 0$$

Zasada minimalnego sprzężenia:

$$\left[(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2 \right] \Phi = 0.$$

Rozwiązania są zespolone, dlatego

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1 + i\phi_2 \right).$$

Gęstość Lagrange'a

$$\mathcal{L} = -(i\partial_\mu + qA_\mu)\Phi^*(i\partial^\mu - qA^\mu)\Phi - m^2 \Phi^* \Phi = 0.$$

Od razu widać, że Φ^* sprzęga się z ładunkiem $-q$:

$$\Phi \longrightarrow \Phi^c = \Phi^*$$
$$A \longrightarrow A^c = -A.$$

Gęstość lagrange'a jest niezmiennicza po pola Φ komutują.

Moment magnetyczny Diraka

Równania:

$$(i\partial_0 - q\Phi)\psi_L - \sigma^i\left(i\partial_i - qA_i\right)\psi_L - m\psi_R = 0,$$
$$(i\partial_0 - q\Phi)\psi_R + \sigma^i\left(i\partial_i - qA_i\right)\psi_R - m\psi_L = 0.$$

W spoczynku, dla cząstki swobodnej

$$\psi_L = \psi_R = ue^{-imt}$$

spodziewamy się, że wgranicy $E \to m$ (lub $m \to \infty$)

$$\psi_L \simeq \psi_R$$

Definiujemy dużą i małą dwukomponentową funkcję falową:

$$\phi = e^{imt}\left(\psi_L + \psi_R\right)$$
$$\chi = e^{imt}\left(\psi_L - \psi_R\right)$$

Dodając i odejmując równania (indeksy są przyjete tak, że $A_i \to \vec{A},\ \partial_i \to \vec{\nabla}$)

$$(i\partial_0 - q\Phi)\phi - \sigma^i\left(i\partial_i + qA_i\right)\chi = 0$$
$$(i\partial_0 - q\Phi + 2m)\chi - \sigma^i\left(i\partial_i + qA_i\right)\phi = 0$$

$$(i\partial_0 - q\Phi)\phi - \sigma^i\left(i\partial_i + qA_i\right)\chi = 0$$
$$(i\partial_0 - q\Phi + 2m)\chi - \sigma^i\left(i\partial_i + qA_i\right)\phi = 0$$

W granicy $m \to \infty$ z drugiego równania

$$\chi = \frac{1}{2m}\sigma^i\left(i\partial_i + qA_i\right)$$

a z pierwszego:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\sigma^i\left(i\partial_i + qA_i\right)\sigma^j\left(i\partial_j + qA_j\right) + q\Phi\right]\phi$$

Przepiszmy

$$\sigma^i\sigma^j\left(i\partial_i + qA_i\right)\left(i\partial_j + qA_j\right) = (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2$$
$$+i\varepsilon_{ijk}\sigma^k(-\partial_i\partial_j + q^2A_iA_j + iq\left(\partial_iA_j\right) + iq\left(A_i\partial_j + A_j\partial_i\right) = \ldots$$

gdzie

$$\sigma^i\sigma^j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma^k.$$
$$\ldots = (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 - q\vec{\sigma}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}_{=\vec{B}}$$

Stąd

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\frac{(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2}{2m} - \frac{q}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + q\Phi\right]\phi$$

dla elektronu $q = -e$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \quad \text{magneton Bohra}$$