Równanie Diraka

Wracamy do poprzedniego problemu: jak napisać relatywistyczne równanie „Schrödingera", tak by było ono liniowe w $E \to i\hbar\partial_t$ i liniowe w $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$ (musi być liniowe, żeby po podniesieniu do kwadratu

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2.$$

Dirac zapostulował

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m = \vec{\alpha} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla}) + \beta m,$$

gdzie $\vec{\alpha}$ oraz β to współczyniki liczbowe, które nie koniecznie komutują (macierze). Stąd pełne równanie ($\hbar = 1$)

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m)\psi = 0.$$

Podnieśmy do kwadratu H:

$$
\begin{aligned}
(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m)^2 &= \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2 p_i^2+\beta^2 m^2 \\
&+\sum_{i<j}\left(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i\right)p_i p_j+m\sum_{i<j}\left(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i\right)p_i \\
&= \vec{p}^2+m^2
\end{aligned}
$$

Stąd:

$$
\begin{gathered}
\alpha_i^2=\beta^2=1, \\
\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=\{\alpha_i,\alpha_j\}=0, \\
\alpha_i\beta+\beta\alpha_i=\{\alpha_i,\beta\}=0.
\end{gathered}
$$

Okazuje się, że rozwiązaniem tych warunków są macierze hermitowskie o wymiarze parzystym. W liczbie wymiarów 3+1 najmniejszy możliwy wymiar tych macierzy jest 4 (Bjorken-Drell):

$$
\alpha_i=\begin{bmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.
$$

Nie jest to jedyna możliwa postać. Jest nieskończenie wiele reprezentacji macierzy $\vec{\alpha}$ i β unitarnie równoważnych:

$$\alpha_i \to U\alpha_i U^\dagger, \quad \beta \to U\beta U^\dagger,$$

które spełniają związki antykomutacji. Inna użyteczna reprezentacja (chiralna):

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Funkcje falowe są czterkomponentowe (bispinory Diraka):

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}, \quad \psi^\dagger = \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix}$$

cząstka i antycząstka w 2 stanach spinowych. Każdy spinor ma 8 stopni swobody (ψ_i są zespolone).

Gęstość Lagrange'a

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger (i\partial_t + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta m)\psi.$$

Zamiast prowdzić wariacje po Reψ i Imψ, wariujemy ψ i $\psi^\dagger$. Równanie Diraka jest automatyczne, bo jest $\mathcal{L}$ liniowe w ψ i $\psi^\dagger$.

Spinory Weyla

Równanie Diraka: $(i\partial_t + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta m)\psi = 0.$

Rozpiszmy ψ przy użyciu dwukomponentowych spinorów Weyla:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}, \ \alpha_i = \begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Równanie Diraka jest równoważne dwóm równaniom:

$$\left(i\partial_t - i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_L - m\psi_R = 0, \qquad \left(i\partial_t + i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_R - m\psi_L = 0.$$

Wprowadzając „czterowektory”

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$$

pamietając, że

$$\partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla}), \quad \partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla})$$

mamy

$$i\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_R = 0, \quad i\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\psi_L = 0.$$

Widzimy, że w przypadku $m = 0$ równania na ψ_L i ψ_R są niezależne.

$$\mathcal{L} = i{\psi_L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + i{\psi_R}^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m({\psi_L}^\dagger\psi_R + {\psi_R}^\dagger\psi_L)$$

Grupa SL(2,C)

Grupa zespolonych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1. 4 parametry zespolone $\longrightarrow$ 8 rzeczywistych, $\det = 1 \longrightarrow$ dwa równania rzeczywiste, stąd jest to grupa 6-cio parametrowa, tak jak grupa Lorentza.

Z każdym czterowektorem x kojarzymy macierz hermitowską:

$$X(x) = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}$$

$$\det X = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^\mu x_\mu .$$

Weźmy

$$M \in \mathrm{SL(2,C)}$$

$$M^\dagger X' M = X \qquad \text{lub} \qquad X' = (M^{-1})^\dagger X M^{-1} . (*)$$

Ponieważ X' jest też hermitowska, istnieje czterowektor x' taki, że

$$X'(x') = \begin{bmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{bmatrix}$$

Transformacja (*) zachowuje wyznacznik, więc

$$x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu .$$

Zatem M odpowiada pewnej (właściwej) transformacji Lorentza $L^{\mu}{}_{\nu}$. Dla $M = 1$ zachodzi $L = 1$. Jednakże macierze M oraz $-M$ odpowiadają tej samej transformacji Lorentza.

Jak wyliczyć L dla danego M?

Zauważmy

$$X(x) = x_{\mu}\tilde{\sigma}^{\mu} = x^0\sigma^0 + x^1\sigma^1 + x^2\sigma^2 + x^3\sigma^3$$
$$= \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}$$

Analogicznie

$$X'(x') = x'_{\mu}\tilde{\sigma}^{\mu}$$

Pamiętajmy

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu},$$
$$x'_{\rho} = g_{\rho\mu}\, L^{\mu}{}_{\nu}\, g^{\nu\tau}\, x_{\tau} = L_{\rho}{}^{\tau}\, x_{\tau}$$

stąd

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\, L_{\mu}{}^{\tau} x^{\nu} x_{\tau} = x^{\nu} x_{\nu} \rightarrow L^{\mu}{}_{\nu}\, L_{\mu}{}^{\tau} = \delta^{\tau}_{\nu}$$

i

$$L^{\tau}{}_{\nu}\, L_{\mu}{}^{\nu} = \delta^{\tau}_{\mu}.$$

Są to macierze wzajemnie odwrotne.

Teraz

$$X'(x') = x'_\mu \tilde{\sigma}^\mu = \tilde{\sigma}^\mu L_\mu{}^\nu x_\nu$$
$$X = M^\dagger X' M = M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M \, L_\mu{}^\nu x_\nu = \tilde{\sigma}^\nu x_\nu$$

Mamy wiec równość

$$M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M \, L_\mu{}^\nu = \tilde{\sigma}^\nu \qquad \times L^\tau{}_\nu$$
$$M^\dagger \tilde{\sigma}^\tau M = L^\tau{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu$$

Dla macierzy σ zachodzi

$$\mathrm{Tr}\, \tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\nu = 2\delta^{\mu\nu}$$

zatem

$$L^\tau{}_\mu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\tilde{\sigma}^\mu M^\dagger \tilde{\sigma}^\tau M \right) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\sigma_\mu M^\dagger \tilde{\sigma}^\tau M \right) .$$

Analogicznie można zdefiniować macierze

$$Y(x) = x_\mu \sigma^\mu ,$$

które transformują się

$$N^\dagger Y' N = Y \rightarrow N^\dagger \sigma^\tau N = L^\tau{}_\nu \sigma^\nu .$$

Mamy zatem:

$$L^{\tau}{}_{\mu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\tilde{\sigma}^{\mu} M^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\tau} M\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\sigma^{\mu} N^{\dagger} \sigma^{\tau} N\right).$$

Macierze M i N są powiązane

$$NM^{\dagger} = 1.$$

Przyjmujemy bez dowodu.

Transformacja równania Diraka

Zapiszmy gęstość Lagrange'a dla cząstek Diraka w układzie S:

$$\mathcal{L} = i{\psi_L}^\dagger(x)\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L(x) + i{\psi_R}^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R(x) - m({\psi_L}^\dagger(x)\psi_R(x) + {\psi_R}^\dagger(x)\psi_L(x))$$

Zachodzi

$$\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu = M^\dagger\tilde{\sigma}^\nu M\, {L_\nu}^\mu\partial_\mu = M^\dagger\tilde{\sigma}^\tau M\,\partial'_\tau$$

gdzie użyto:

$$\tilde{\sigma}^\mu = M^\dagger\tilde{\sigma}^\nu M\, {L_\nu}^\mu, \quad {L_\nu}^\mu\partial_\mu = \partial'_\nu$$

Analogicznie

$$\sigma^\mu\partial_\mu = N^\dagger\sigma^\tau N\partial'_\tau.$$

Aby człon kinetyczny był niezmienniczy

$$M\psi_L(x) = {\psi_L}'(x'), \quad N\psi_R(x) = {\psi_R}'(x')$$

Mamy zatem:

$$M\psi_L(x) = {\psi_L}'(x'), \quad N\psi_R(x) = {\psi_R}'(x')$$

Człon masowy

$$\begin{aligned}&{\psi_L}^\dagger(x)\psi_R(x) + {\psi_R}^\dagger(x)\psi_L(x) = \\ &{\psi_L}'^\dagger(x')(M^\dagger)^{-1}N^{-1}{\psi_R}'(x') + {\psi_R}'^\dagger(x')(N^\dagger)^{-1}M^{-1}{\psi_L}'(x')\end{aligned}$$

jest niezmienniczy, jeśli

$$(M^\dagger)^{-1}N^{-1} = (N^\dagger)^{-1}M^{-1} = 1 \longrightarrow M^\dagger N = N^\dagger M = 1.$$

Przykłady transformacji

Obrót

$$L^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

to M i N są unitarne:

$$M = N = \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić ze wzoru

$$L^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(\tilde{\sigma}^\nu M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M\right).$$

Przykłady transformacji

Boost ($v/c = \tanh\theta$):

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

to M i N nie są unitarne

$$M = \begin{bmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{\theta/2} \end{bmatrix}.$$

Parzystość

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = -\vec{r}, \quad \vec{\nabla} \to \vec{\nabla}\,' = -\vec{\nabla}$$

Mamy

$$\tilde{\sigma}^\mu \partial'_\mu = \sigma^\mu \partial_\mu, \quad \sigma^\mu \partial'_\mu = \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu.$$

Gęstość Lagrange'a pozozstaje niezmiennicza gdy

$$\psi_L(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} {\psi_L}^{\mathcal{P}}(x\,') = \psi_R(x),$$

$$\psi_R(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} {\psi_R}^{\mathcal{P}}(x\,') = \psi_L(x)$$

z dokładnością do fazy $e^{i\alpha}$, którą wybieramy $\alpha = 0$.

Macierze gamma, formy współzmiennicze

Wprowadza się

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i.$$

Wtedy

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}$$
$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}, \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}$$

w innych przypadkach zero.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \psi^\dagger(i\partial_t + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta m)\psi \\ &= \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \gamma^0\beta m) \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\end{aligned}$$

gdzie

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$

a równanie Diraka ma postać

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0.$$

W reprezentacji chiralnej

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}$$

Wprowadza się

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_L \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_R \end{bmatrix}$$

są *operatorami rzutowymi.*

Formy biliniowe

$$\psi_L{}^\dagger\psi_R + \psi_R{}^\dagger\psi_L = \overline{\psi}\psi \quad \text{(skalar)}$$
$$i(\psi_L{}^\dagger\psi_R - \psi_R{}^\dagger\psi_L) = i\overline{\psi}\gamma^5\psi \quad \text{(pseudoskalar)}$$
$$\psi_L{}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\psi_L + \psi_R{}^\dagger\sigma^\mu\psi_R = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \text{(wektor)}$$
$$\psi_L{}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\psi_L - \psi_R{}^\dagger\sigma^\mu\psi_R = \overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \quad \text{(pseudowektor)}$$

Rozwiązania równania Diraka dla cząstki w spoczynku

Równania

$$i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L = 0$$

mają rozwiazania w postaci fal płaskich

$$\psi_{L,R}(x) = u_{L,R} e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})} = u_{L,R} e^{-ipx}$$

gdzie

$$u_{L,R}$$

są dwukomponentowymi spinorami. Spełniony jest związek

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

(bo funkcje falowe r. Diraka spełniają też r. Kleina-Gordona). Aby znaleźć $u_{L,R}$ rozwiążmy r. Diraka w układzie S', gdzie cząstka spoczywa $\vec{p} = 0$ ($\sigma^0 = \tilde{\sigma}^0 = 1$):

$$i\partial'_t \psi'_L = m\psi'_R, \quad i\partial'_t \psi'_R = m\psi'_L.$$

Rozwiązania o dodatniej energii

Ponieważ $E' = \pm m$, rozpatrzmy najpierw rozwiązania o dodatniej energii $E' = m$:

$$\psi'_L = ue^{-imt'}, \quad \psi'_R = ue^{-imt'},$$

czyli $u_L = u_R = u \rightarrow$ rozwiazania lewoskretne i prawoskretne są identyczne (dodatnia parzystość), gdzie

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Spin

Podobnie jak dla fotonu zbadamy, jak wygląda generator spinu. Transformacja obrotu:

$$M\psi_L(x) = \psi'_L(x'), \quad N\psi_R(x) = \psi'_R(x')$$

Pamietajmy

$$U_L\,\psi_L(x) = M\,\psi_L(L^{-1}x)$$

czyli $U_L = M$ oraz (patrz spin fotonu)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

czyli

$$M = N = \begin{bmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\phi/2} \end{bmatrix} = 1 - i\phi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \ldots = 1 - i\frac{\phi}{2}\sigma^3 + \ldots$$

$$S_z = i\hbar \lim_{\phi\to 0} \left(U_L\left(\phi\right) - 1\right)/\phi = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd mamy dla spinorów Weyla:

$$S_z \psi_{L,R} = \frac{\hbar}{2} \sigma^3 \psi_{L,R}.$$

Stany własne

$$+\frac{\hbar}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -\frac{\hbar}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla bispinorów Diraka

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} \rightarrow \Sigma_z = \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \Sigma_{x,y} = \begin{bmatrix} \sigma^{1,2} & 0 \\ 0 & \sigma^{1,2} \end{bmatrix}.$$

Zatem operator Casimira:

$$S^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 + \Sigma_z^2) = \frac{3}{4}\hbar^2 \times \mathbf{1} = s(s+1)\hbar^2 \times \mathbf{1} \rightarrow s = \frac{1}{2}.$$

bo

$$(\sigma^i)^2 = 1.$$

Fale płaskie

Przejdźmy do układu S, w którym układ S' (zatem i cząstka) porusza się z predkością:

$$\vec{v} = (0, 0, v), \quad v > 0, \quad \tanh\theta = \frac{v}{c}.$$

Ponieważ w rozwiązaniach jest czynnik

$$e^{-imt'}$$

zbadajmy transformację Lorentza:

$$\begin{aligned}
t^{'}c &= tc\cosh\theta - z\sinh\theta \quad \longleftarrow \frac{v}{c} = \tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} \\
&= \cosh\theta\left[(tc - z\frac{v}{c})\right] \quad \longleftarrow \frac{1}{\cosh^2\theta} = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \longleftarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{\cosh^2\theta - 1}{\cosh^2\theta} \\
&= \gamma\left[tc - z\frac{v}{c}\right] \quad \longleftarrow \gamma = \cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.
\end{aligned}$$

Mamy ($c = 1$)

$$p' = (m, 0, 0, 0) = L \cdot p$$
$$p = L^{-1} p' = (m \cosh\theta, 0, 0, m \sinh\theta)$$

$$E = m\cosh\theta = m\gamma, \quad p = m\sinh\theta = m\gamma v$$

i ostatecznie

$$mt' = m\gamma\,[t - zv] = Et - pz$$

Mamy

$$\psi_L(x) = M^{-1}\psi'_L(x') = e^{-imt'} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{+\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$
$$\psi_R(x) = N^{-1}\psi'_R(x') = e^{-imt'} \begin{bmatrix} e^{+\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Wybierzmy stan o $S_x = +\hbar/2$, czyli $u_1 = 1, u_2 = 0$. Teraz ($c = 1$):

$$\psi_L(x) = e^{-i(Et - pz)} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix}, \ \psi_R(x) = e^{-i(Et - pz)} \begin{bmatrix} e^{+\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Skrętność (helicity)

$$\text{helicity} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

nasz stan ma $\vec{p} = (0, 0, p)$, więc helicity $= \Sigma_z$, czyli dla przypadku $u_1 = 1, u_2 = 0$ helicity $= +1$. Wprowadźmy bispinor o dodatniej energii i dodatnim helicity:

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et - pz)} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Analogicznie dla $u_1 = 0, u_2 = 1$ mamy bispinor o ujemnej skrętności:

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et - pz)} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \\ e^{-\theta/2} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie dla dowolnego $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ otrzymujemy poprzez obrót. **Obrót zachowuje helicity**. Zatem dla jesli obrót przekształca

$$\vec{p}' = (0, 0, p) \to \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$$

$$u_+(\vec{p}') = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix} \to u_+(\vec{p}) : \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u_+(\vec{p}) = u_+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \left|+\right\rangle \\ e^{+\theta/2} \left|+\right\rangle \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \left|\pm\right\rangle = \pm \left|\pm\right\rangle, \quad \text{gdzie} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \left|+\right\rangle \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \left|-\right\rangle$$

Podsumowując

$$\psi_+ = e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})} u_+(\vec{p}) = e^{-ip^\mu x_\mu} u_+(\vec{p}), \quad \psi_- = e^{-ip^\mu x_\mu} u_-(\vec{p}),$$

gdzie

$$u_+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \left|+\right\rangle \\ e^{+\theta/2} \left|+\right\rangle \end{bmatrix}, \quad u_-(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{+\theta/2} \left|-\right\rangle \\ e^{-\theta/2} \left|-\right\rangle \end{bmatrix}.$$

Rozwiązania o ujemnej energii

$$i\partial_t'\psi_L' = m\psi_R', \quad i\partial_t'\psi_R' = m\psi_L'.$$

Rozwiązania dla $E' = -m$:

$$\psi_L' = ve^{imt'}, \quad \psi_R' = -ve^{imt'}$$

czyli $v_L = -v_R = v \longrightarrow$ rozwiazania lewoskrętne i prawoskretne różnią się znakiem (ujemna parzystość).

Boost:

$$p = L^{-1}p' = (-m\cosh\theta, 0, 0, -m\sinh\theta)$$

$$E = -m\cosh\theta = -m\gamma, \quad p = -m\sinh\theta = -m\gamma v$$

(pęd ma znak minus w stosunku do rozw. z $E > 0$) i ostatecznie

$$mt' = m\gamma\,[t - zv] = -(Et - pz)$$

Tu

$$E, p < 0$$

Rozwiązania o dodatniej i ujemnej helicity (przeciwnie niż dla rozw. z $E > 0$):

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et-pz)} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \\ -e^{-\theta/2} \end{bmatrix}, \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et-pz)} \begin{bmatrix} -e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Po dokonaniu obrotu

$$\psi_+ = e^{-ip^\mu x_\mu} v_+(\vec{p}), \quad \psi_- = e^{-ip^\mu x_\mu} v_-(\vec{p}), \quad p = (-m\gamma, -m\gamma\vec{v})$$

lub

$$\psi_+ = e^{ip^\mu x_\mu} v_+(\vec{p}), \quad \psi_- = e^{ip^\mu x_\mu} v_-(\vec{p}), \quad p = (m\gamma, m\gamma\vec{v})$$

gdzie

$$v_+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{+\theta/2} \left|-\right\rangle \\ -e^{-\theta/2} \left|-\right\rangle \end{bmatrix}, \quad v_-(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -e^{-\theta/2} \left|+\right\rangle \\ e^{+\theta/2} \left|+\right\rangle \end{bmatrix}.$$

Łatwo wykazać, że dla rozwiązań z ujemną energią:

$$\overline{\psi}\psi = \psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L = -1.$$

Interpretacja $\longrightarrow$ morze Diraka.

Tensor energii i pędu

Zapiszmy

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &= i\psi_a^*\partial_0\psi_a + \underbrace{\psi_c^*\gamma_{cb}^0}_{\overline{\psi}_b}\left(i\gamma_{ba}^k\partial_k - m\delta_{ba}\right)\psi_a.\end{aligned}$$

Traktując ψ_a^* i ψ_a jako niezależne mamy

$$\begin{aligned}T_\nu^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)}\partial_\nu\psi_a - \mathcal{L}\delta_\nu^\mu \\ T_0^0 &= i\psi_a^*\partial_0\psi_a - \mathcal{L} = \overline{\psi}\left(-i\gamma^k\partial_k + m\right)\psi\end{aligned}$$

Rzeczywiście dla $p = 0 \longrightarrow H = T_0^0 = m\overline{\psi}\psi = \pm m$. Z kolei $p_k = T_k^0$

$$T_k^0 = i\psi_a^*\partial_k\psi_a = i\overline{\psi}\gamma^0\partial_k\psi.$$

Rozkład na fale płaskie

Rozwiązanie ogólne ($E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(b_{\vec{p}\,\varepsilon} u_\varepsilon(\vec{p}) e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}\,\varepsilon} v_\varepsilon(\vec{p}) e^{i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right)$$

(u oraz v są bispinorami 4 wym.). Zmiana normalizacji

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{E}}$$

stanowi problem dla cząstek bezmasowych (w wielkościach fizycznych masa się upraszcza i można przejść do granicy $m = 0$).

Własności ortogonalności ($\varepsilon = \pm$):

$$u_\varepsilon^\dagger(\vec{p})u_\varepsilon(\vec{p}) = v_\varepsilon^\dagger(\vec{p})v_\varepsilon(\vec{p}) = \frac{E_p}{m},$$
$$u_\varepsilon^\dagger(\vec{p})u_{-\varepsilon}(\vec{p}) = v_\varepsilon^\dagger(\vec{p})v_{-\varepsilon}(\vec{p}) = 0,$$
$$u_\varepsilon^\dagger(\vec{p})v_{\varepsilon'}(-\vec{p}) = v_\varepsilon^\dagger(-\vec{p})u_{\varepsilon'}(\vec{p}) = 0.$$

Na przykład:

$$u_+^\dagger(\vec{p})u_+(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left[e^{-\theta/2}\langle +| \quad e^{+\theta/2}\langle +|\right]\begin{bmatrix} e^{-\theta/2}|+\rangle \\ e^{+\theta/2}|+\rangle \end{bmatrix} = \frac{e^{-\theta}+e^{\theta}}{2}$$
$$= \cosh\theta = \frac{E}{m}.$$

Mamy:

$$H = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm}\left(b^*_{\vec{p}\varepsilon}b_{\vec{p}\varepsilon} - d_{\vec{p}\varepsilon}d^*_{\vec{p}\varepsilon}\right)E_p, \quad \vec{P} = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm}\left(b^*_{\vec{p}\varepsilon}b_{\vec{p}\varepsilon} - d_{\vec{p}\varepsilon}d^*_{\vec{p}\varepsilon}\right)\vec{p}.$$

oraz

$$\int d^3x\,\psi^\dagger\psi = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm}\left(b^*_{\vec{p}\varepsilon}b_{\vec{p}\varepsilon} + d_{\vec{p}\varepsilon}d^*_{\vec{p}\varepsilon}\right)$$

Rozkład w bazie helicity:

$$
\begin{aligned}
\psi_L =& \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \\
& \left[\left(b_{\vec{p}+} e^{-\theta/2} \left| + \right\rangle + b_{\vec{p}-} e^{+\theta/2} \left| - \right\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right. \\
& \left. + \left(d^*_{\vec{p}+} \, e^{+\theta/2} \left| - \right\rangle - d^*_{\vec{p}-} \, e^{-\theta/2} \left| + \right\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_R =& \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \\
& \left[\left(b_{\vec{p}+} e^{+\theta/2} \left| + \right\rangle + b_{\vec{p}-} e^{-\theta/2} \left| - \right\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right. \\
& \left. - \left(d^*_{\vec{p}+} \, e^{-\theta/2} \left| - \right\rangle - d^*_{\vec{p}-} \, e^{+\theta/2} \left| + \right\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]
\end{aligned}
$$

Dla każdego $\vec{p}$ są **cztery** niezależne współczynniki **zespolone** (*spinory Diraka*):

$$
\underbrace{b_{\vec{p}+}, b_{\vec{p}-}}_{\text{cząstki}}, \underbrace{d^*_{\vec{p}+}\,, d^*_{\vec{p}-}}_{\text{antycząstki}}
$$

Można narzucić warunek:

$$d_{\vec{p}+} = b_{\vec{p}+}, \quad d_{\vec{p}-} = b_{\vec{p}-}$$

są to wtedy *spinory Majorany*: cząstki i antycząstki są identyczne.

Granica relatywistyczna

Pamiętajmy

$$\frac{m}{E} = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{E}}e^{\theta/2} = \sqrt{\frac{2e^{\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}} = \sqrt{\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}+e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}} = \sqrt{1+\tanh\theta} = \sqrt{1+\frac{v}{c}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{E}}e^{-\theta/2} = \sqrt{\frac{2e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}} = \sqrt{\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}-e^{\theta}+e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}} = \sqrt{1-\tanh\theta} = \sqrt{1-\frac{v}{c}}$$

W granicy $v/c \to 1$

$$\sqrt{\frac{m}{E}}e^{\theta/2} \to \sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{m}{E}}e^{-\theta/2} \to 0$$

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}} \left[b_{\vec{p}-} \left|-\right\rangle e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}+}\, e^{+\theta/2} \left|-\right\rangle e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]$$

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}} \left[b_{\vec{p}+} \left|+\right\rangle e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}-}\, e^{+\theta/2} \left|+\right\rangle e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]$$

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left[b_{\vec{p}-} \left| - \right\rangle e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}+}\, e^{+\theta/2} \left| - \right\rangle e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]$$

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left[b_{\vec{p}+} \left| + \right\rangle e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}-}\, e^{+\theta/2} \left| + \right\rangle e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]$$

W granicy $v/c \to 1$ czyli $m/E \to 0$ spinory ψ_L i ψ_R są niezależne i zawierają tylko stany o jednej skrętności (helicity). Jak się okaże w modelu standardowym bezmasowe neutrina są lewoskrętne.