

Elektrodynamika klasyczna

Lorentzowsko niezmiennicza teoria pola, dana przez równania Maxwella

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho & \text{(a)} & & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J} & \text{(b)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \text{(c)} & & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \text{(d)}\end{aligned}$$

w jednostkach ($c = 1$, $\mu_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 1$, gdzie siła $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}$). W klasycznej elektrodynamice źródła są niezależne i podlegają zasadzie zachowania ładunku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0,$$

które daje się zapisać w postaci loretzowsko niezmienniczej:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{gdzie} \quad J^\mu = (\rho, \vec{J}).$$

Równania jednorodne (c) i (d) są równoważne istnieniu potencjałów

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Wprowadza się *czteropotencjał*:

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

oraz *tensor pola* elektromagnetycznego:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Łatwo pokazać, że

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas równania jednorodne (c) i (d) redukują się do tożsamości:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} \equiv 0,$$

a równania niejednorodne (a) i (b) przyjmują jawnie kowariantną postać

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu.$$

Zasada wariacyjna

Jaką postać ma gęstość Lagrange'a, która prowadzi do równań Maxwella, jeśli

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + (\delta A)^\mu$$

przy ustalonym J^μ ?

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu.$$

Zadanie: pokazać, że

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - J^\mu A_\mu.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\nu A_\nu \right] && \text{wariacja kwadratu } \delta F^2 = 2F (\delta F) \\
 &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\delta F)^{\mu\nu} - J^\nu (\delta A)_\nu \right] && \text{jawna postać } F^{\mu\nu} \\
 &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} [\partial^\mu (\delta A)^\nu - \partial^\nu (\delta A)^\mu] - J^\nu (\delta A)_\nu \right] && \text{antysymetria } F_{\mu\nu} \\
 &= \int d^4x \left[-F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A)^\nu - J^\mu (\delta A)_\mu \right] && \text{całka przez części} \\
 &= \int d^4x [\partial^\mu F_{\mu\nu} (\delta A)^\nu - J^\nu (\delta A)_\nu] && \text{zamiana indeksów górnych na dolne} \\
 &= \int d^4x [\partial_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu] (\delta A)_\nu = 0
 \end{aligned}$$

Zatem:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu.}$$

Swoboda cechowania

Potencjał A^μ nie jest jednoznacznie określony

$$A^\mu \quad \text{oraz} \quad A^\mu + \partial^\mu \chi$$

prowadzą do tego samego tensora pola

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \rightarrow \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \underbrace{\partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu \partial^\mu \chi}_{=0} = F^{\mu\nu}.$$

Transformacja

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

nazywa się transformacją cechowania (gauge transformation). Pod wpływem transformacji cechowania zmienia się jednak działanie: $(J_\nu A^\nu)$

$$\begin{aligned} \Delta S &= - \int d^4x J_\nu \partial^\nu \chi \quad \text{całka przez części} \\ &= \int d^4x (\partial^\nu J_\nu) \chi. \end{aligned}$$

$\Delta S = 0$ dla dowolnego χ , jedynie gdy zachowany jest ładunek

$$\partial^\nu J_\nu = 0.$$

**NIEZMIENNICZOŚĆ WZGL. TRANSFORMACJI
CECHOWANIA**



ZACHOWANIE ŁADUNKU

Rozwiązania równań Maxwella

Równania Maxwella

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

wyrażone przez potencjały, mają postać

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J^\nu.$$

Musimy ustalić cechowanie. Typowy wybór: cechowanie radiacyjne (kulombowskie)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

(w całej przestrzeni i w każdej chwili) nie jest niezmienniczy lorentzowsko (nie jest prawdziwy w innym, poruszającym się układzie). W cechowaniu radiacyjnym równanie na potencjał elektryczny $\Phi = A^0$ ma postać:

$$\partial_i \partial^i A^0 = -\vec{\nabla}^2 A^0 = J^0 = \rho.$$

Dowód:

Rzeczywiście, mając na uwadze, że w cechowaniu radiacyjnym

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0$$

UWAGA:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla}), \quad \partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla})$$

mamy

$$\begin{aligned} J^0 &= (\partial_\mu \partial^\mu) A^0 - \partial^0 (\partial_\mu A^\mu) \\ &= \partial_t^2 A^0 - \vec{\nabla}^2 A^0 - \partial_t \partial_t A^0 + \partial_t \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{=0} \\ &= -\vec{\nabla}^2 A^0 + \underbrace{\partial_t^2 A^0 - \partial_t^2 A^0}_{=0}. \end{aligned}$$

Rozwiązania równania

$$-\vec{\nabla}^2 A^0 = \rho$$

są znane

$$A^0(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

i otrzymuje się je metodą funkcji Greena. W cechowaniu radiacyjnym $\Phi = A^0$ jest „na sztywno” związane z ładunkiem, nie ma rozwiązań falowych na A^0 .

Składowe wektorowe

$$J^i = (\partial_\mu \partial^\mu) A^i + \partial^i (\partial_\mu A^\mu) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} A^0.$$

W pustej przestrzeni ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$) w cechowaniu radiacyjnym mamy:

$$A^0 = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = 0. \quad (1)$$

Wygląda to jak trzy równania Kleina-Gordona

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi = 0$$

na składowe $A^{1,2,3}$ z $m = 0$

Rozwinięcie na fale płaskie

Rozwiązania są dane jako fale:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\varepsilon} a \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t + \theta_k)$$

gdzie $\omega_k^2 = k^2$, z tym, że nie są to pola niezależne, bo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0.$$

Zatem są tylko *dwa* niezależne wektory trójwymiarowe $\vec{\varepsilon}_{1,2}(\vec{k})$: mamy *dwie* polaryzacje ($A^0 = 0$). Ogólnie

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1,2} \vec{\varepsilon}_{\lambda}(\vec{k}) \left[\frac{a_{\vec{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + \frac{a_{\vec{k}\lambda}^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right],$$

gdzie

$$\vec{\varepsilon}_{\lambda}(\vec{k})$$

są niezależnymi liniowo wektorami jednostkowymi, prostopodłymi do \vec{k} . Podobnie jak przypadku pola skalarnego zamykamy układ w pudle $V = l^3$ i przyjmujemy okresowe warunki brzegowe.

Inne wybory cechowania

Możliwe są inne wybory cechowania. Używa się często relatywistycznie niezmienniczych cechowań, jak cechowanie Lorentza (lub Landaua):

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

w którym równania pola mają postać

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) A^\mu = J^\mu.$$

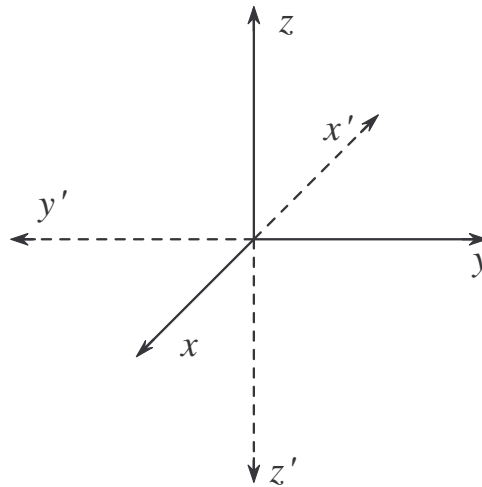
Inne użyteczne cechowania:

$$A^0 = 0 \quad \text{czasowe}$$

$$A^3 = 0 \quad \text{osiowe}$$

$$\Phi \in \mathcal{R} \quad \text{unitarne}$$

Odbicie przestrzenne



Rozważmy odbicie, które zmienia *skretność* układu współrzędnych (parzystość \mathcal{P}):

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}, \quad \vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$$

Gęstość ładunku się nie zmienia, ale prąd ($\vec{J} = \rho\vec{v}$) tak

$$\rho(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) = \rho(\vec{r}, t), \quad \vec{J}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{J}^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) = -\vec{J}(\vec{r}, t).$$

Pole elektryczne jest wektorem, magnetyczne pseudowektorem:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{E}^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) = \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{B}^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) = -\vec{B}(\vec{r}, t).$$

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) &= \rho(\vec{r}, t), & \vec{J}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{J}^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) &= -\vec{J}(\vec{r}, t). \\ \vec{E}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{E}^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) &= -\vec{E}(\vec{r}, t), & \vec{B}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{B}^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) &= \vec{B}(\vec{r}, t). \end{aligned}$$

Stąd:

$$\Phi(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \Phi^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) = \Phi(\vec{r}, t), \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{A}^{\mathcal{P}}(\vec{r}', t) = -\vec{A}(\vec{r}, t).$$

Równania Maxwella są niezmiennicze, mają taką samą postać w wyjściowym (prawoskrętnym) układzie i w przetransformowanym (lewostronnym). Najlepiej widać to z postaci równań:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho & \quad \text{(a)} & \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} & \quad \text{(b)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \quad \text{(c)} & \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 & \quad \text{(d)} \end{aligned}$$

Lagrangian jest też niezmienniczy.

Sprzężenie ładunkowe

polega na zamianie czątki na antycząstkę (\mathcal{C} – charge conjugation):

$$\rho(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{C}} \rho^{\mathcal{C}}(\vec{r}, t) = -\rho(\vec{r}, t), \quad \vec{J}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{C}} \vec{J}^{\mathcal{C}}(\vec{r}, t) = -\vec{J}(\vec{r}, t).$$

Aby równania Maxwella były niezmiennicze, musimy przyjąć:

$$\Phi(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{C}} \Phi^{\mathcal{C}}(\vec{r}, t) = -\Phi(\vec{r}, t), \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \xrightarrow{\mathcal{C}} \vec{A}^{\mathcal{C}}(\vec{r}, t) = -\vec{A}(\vec{r}, t).$$

Lagrangian jest też niezmienniczy.

Spin fotonu - grupa obrotów

W mechanice kwantowej f. falowe transformują się w wyniku obrotów (R – macierz obrotu, α – liczby kwantowe):

$$\psi_\beta(R\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}) \quad \text{lub} \quad \psi_\beta(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}).$$

Wprowadzamy unitarny operator transformacji stanów kwantowych

$$\psi_\beta(\vec{r}) = \hat{U}_R \psi_\alpha(\vec{r})$$

Czyli

$$\hat{U}_R \psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}).$$

Każdy obrót R można przedstawić jako złożenie trzech obrotów kolejno wokół osi z , x i y :

$$R = R_y(\phi_y) R_x(\phi_x) R_z(\phi_z).$$

Np. obrót wokół osi z :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_z & -\sin \phi_z & 0 \\ \sin \phi_z & \cos \phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Ponieważ, aby wyliczyć postać operatora \hat{U}_R będziemy korzystali z rozwinięcia Taylora, wystarczy rozważyć obroty *infinitesimalne*:

$$R_z = 1 + \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & 0 \\ \phi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots,$$

Pełna macierz R jest iloczynem macierzy $R_y(\phi_y)R_x(\phi_x)R_z(\phi_z)$:

$$R = 1 + \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} + \dots = 1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \vec{S}$$

gdzie wektor $\vec{\phi}$ jest zdefiniowany jako:

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix}.$$

$$R = 1 + \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} + \dots = 1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \vec{S}$$

gdzie macierze

$$S_{km}^l = i\hbar \epsilon_{lkm},$$

przyjmują jawną postać

$$S^1 = i\hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^2 = i\hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^3 = i\hbar \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inny zapis

$$R = 1 + \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

i dalej

$$\vec{r}' = R\vec{r} = \vec{r} + \begin{bmatrix} \phi_y z - \phi_z y \\ \phi_z x - \phi_x z \\ \phi_x y - \phi_y x \end{bmatrix} + \dots = \vec{r} + \vec{\phi} \times \vec{r} + \dots,$$

Dotychczas rozważaliśmy funkcje falowe ψ_α , które są *skalarami* względem transformacji obrotu. Rozważmy funkcję falową, która sama jest trójwymiarowym wektorem

$$\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \psi_\alpha^1(\vec{r}) \\ \psi_\alpha^2(\vec{r}) \\ \psi_\alpha^3(\vec{r}) \end{bmatrix}.$$

Wówczas prawo transformacji przybiera postać

$$\vec{\psi}_\beta(R\vec{r}) = R \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).$$

Macierz R działa tylko na wskaźniki wektorowe funkcji falowej, a nie na indeksy α, β . Stąd operator \hat{U}_R spełnia równanie

$$\hat{U}_R \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \psi_\beta(\vec{r}) = R \vec{\psi}_\alpha(R^{-1}\vec{r}).$$

Dla obrotów infinitesimalnych

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_R \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= \left(1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \vec{S} \right) \vec{\psi}_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) \\
 &= \left(1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \vec{S} \right) \left(1 - (\vec{\phi} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \vec{S} \right) \left(1 - \vec{\phi} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \right) \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
 &= \left(1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \vec{S} - \frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \vec{L} \right) \vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
 \end{aligned}$$

Pamiętajmy, że \vec{S} działają na indeksy wektorowe funkcji $\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$, a $\vec{L} = -i\hbar (\vec{r} \times \vec{\nabla})$ są operatorami różniczkowymi. Zatem

$$\hat{U}_R(\vec{\phi}) = 1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot (\vec{S} + \vec{L}) + \dots$$

czyli że generatory obrotów są sumą generatora \vec{L} i generatora \vec{S} :

$$\boxed{\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}.}$$

Spin fotonu

Spin dla cząstki z masą definiujemy jako wartość własną generatora obrotu dla cząstki w spoczynku. Foton nigdy nie spoczywa. Wybierzmy foton, który porusza się po prostej wzdłuż osi z . Wówczas $J_z = S_z$. Operator S_z można odczytać ze wzoru:

$$S_z = i\hbar \lim_{\phi \rightarrow 0} \left(\hat{U}_{R_z}(\phi) - 1 \right) / \phi$$

gdzie $\hat{U}_{R_z}(\phi) = R_z(\phi)$.

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq 1 + \begin{bmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$S_z = \hbar \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\vec{k} = (0, 0, 1)$ mamy dwa prostopadłe wektory polaryzacji

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(\vec{\varepsilon}_x(\vec{k}) a_{\vec{k}x} + \vec{\varepsilon}_y(\vec{k}) a_{\vec{k}y} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + \text{h.c.}$$

Zdiagonalizujemy macierz S_z :

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \lambda \rightarrow \lambda_{\pm,0} = \pm 1, 0.$$

Wektory własne:

$$\vec{\varepsilon}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\vec{\varepsilon}_x = \sqrt{2}(\vec{\varepsilon}_+ + \vec{\varepsilon}_-), \quad \vec{\varepsilon}_y = -i\sqrt{2}(\vec{\varepsilon}_+ - \vec{\varepsilon}_-), \quad \vec{\varepsilon}_+^* = \vec{\varepsilon}_-$$

Zatem pole $\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}, t)$ możemy rozpisać:

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\omega_k V}} \left((\vec{\varepsilon}_+ + \vec{\varepsilon}_-) a_{\vec{k}x} - i(\vec{\varepsilon}_+ - \vec{\varepsilon}_-) a_{\vec{k}y} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega_k V}} \left(\vec{\varepsilon}_+ (a_{\vec{k}x} - i a_{\vec{k}y}) + \vec{\varepsilon}_- (a_{\vec{k}x} + i a_{\vec{k}y}) \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + \text{h.c.}\end{aligned}$$

Czyli dowolne pole opisujące promieniowanie dane poprzez fale płaskie można rozłożyć na dwie składowe o rzucie spinu na oś z równym $+$ lub $-$ (tak na prawdę jest to polaryzacja kołowa). Nie ma składowej zerowej! Foton jest zawsze poprzeczny.

Energia pola elektromagnetycznego

Ponieważ pole A^μ jest w zasadzie superpozycją 2 pól skalarnych (abstrahując od własności transformacyjnych), zatem

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \rightarrow T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\rho)} \partial_\nu A^\rho - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

co daje

$$T_0^0 = -F_{0\mu} F^{0\nu} + F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

Energia i pęd dane są jako

$$H = \int d^3r T_0^0 = \sum_{\vec{k}, \lambda} \omega_k a_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}\lambda}$$

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{k} a_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}\lambda}$$

Masywne pole wektorowe

Wielki sukces modelu standardowego polega na poprawnej konstrukcji teorii pola wektorowego z masą. Proste uogólnienie wzorujące się na polu skalarnym

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2)$$
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - J^\mu A_\mu$$

nie jest niezmiennicze względem transformacji cechowania. (Znak przy masie sprawdzimy a' posteriori). Zbadajmy jednak konsekwencje takiego lagrangianu. Równania ruchu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu.$$

Widać, że zmiana cechowania nie zmienia $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ oraz J^ν a zmienia A^ν . Różniczkując to równanie po ∂_ν mamy

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu.$$

To nie jest warunek ustalający cechowanie, ale wskazuje, że nie wszystkie skład-

owe pola A^ν są niezależne. Rozpiszmy równanie ruchu

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu - J^\nu = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu - J^\nu \\ &= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{m^2} \partial^\nu \partial_\mu J^\mu + m^2 A^\nu - J^\nu. \end{aligned}$$

W próżni ($J^\mu = 0$)

$$\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 A^\nu + m^2 A^\nu = 0$$

analogicznie do równania Kleina-Gordona

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \varphi = 0,$$

co potwierdza poprawność wyboru znaku m^2 . Rozwiązanie w postaci fal płaskich

$$A^\nu = \varepsilon^\nu a \cos(kx + \theta)$$

gdzie

$$kx = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}, \quad \omega^2 - \vec{k}^2 = m^2.$$

Dodatkowy warunek

$$k\varepsilon = 0.$$

Wybierając pęd w kierunku osi z :

$$k = (\omega, 0, 0, k)$$

mamy trzy (znormalizowane $\varepsilon^2 = -1$) wektory polaryzacji

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $m \neq 0$ „foton” może spoczywać. Podobnie jak poprzednio, można zdefiniować operator spinu. Oprócz polaryzacji \pm mamy polaryzację $\lambda = 0$.