

Michał Praszalowicz, pok. 438.

michal@if.uj.edu.pl

strona www:

th-www.if.uj.edu.pl/~michal

wykład 3 godz. za wyjątkiem listopada

Egzamin: esej max. 10 stron na jeden z listy tematów + rozmowa

USOS!

Model Standardowy – teoria pola

Mechanika klasyczna – równania na wielkości takie jak pęd, energia położenie

Mechanika kwantowa – wielkości klasyczne \rightarrow operatory, które działają na funkcje falowe, interpretacja probabilistyczna

Teoria pola – funkcja falowa \rightarrow operator pola

– niezmienniczość Lorentza (STW)

– niezachowanie liczby „cząstek”

Transformacja Lorentza

Czterowektory:

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Transformacja Lorentza:

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$$

zachowuje interwał $(x^\mu + \Delta x^\mu)$ między *zdarzeniami*

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = (\Delta s')^2$$

Tensor metryczny

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

pomaga zapisać to w zwartej formie

$$(\Delta s')^2 = g_{\mu\nu} \Delta x'^{\mu} \Delta x'^{\nu} = g_{\mu\nu} L^{\mu}_{\tau} L^{\nu}_{\rho} \Delta x^{\tau} \Delta x^{\rho} = g_{\tau\rho} \Delta x^{\tau} \Delta x^{\rho}$$

Transformacja Lorentza zachowuje tensor metryczny

$$g_{\mu\nu} L^{\mu}_{\tau} L^{\nu}_{\rho} = g_{\tau\rho}$$

Ponieważ tensor metryczny jest symetryczny jest to 10 równań. L^{μ}_{τ} jest rzeczywistą macierzą 4×4 o 16 parametrach minus 10 warunków, co daje 6 niezależnych parametrów: 3 obroty i 3 „boosty”.

Klasyfikacja transformacji Lorentza

$$1 = g_{00} = g_{\mu\nu} L^\mu{}_0 L^\nu{}_0 = (L^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (L^i{}_0)^2$$

co daje

$$(L^0{}_0)^2 > 1 \rightarrow L^0{}_0 > 1 \quad \text{lub} \quad L^0{}_0 < -1$$

sign $L^0{}_0$	det L	
+	+1	właściwe
-	-1	odbicie czasowe
+	-1	odbicie przestrzenne
-	+1	odbicie całkowite

Można łatwo pokazać

$$L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\mu = L^\nu{}_\mu L^\mu{}_\rho = \delta^\nu{}_\rho.$$

Czterowektor energii i pędu:

$$p^\mu = (E, cp_x, cp_y, cp_z)$$
$$p^2 = E^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4.$$

Stąd

$$E = \pm c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \simeq \pm \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots \right)$$

Równanie Schrödingera

Nierelatywistyczna mechanika kwantowa:

$$E \rightarrow \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$\hat{H}\psi(x, t) = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}\psi(x, t) \quad \uparrow \quad \boxed{\text{zależnie od reprezentacji}}$$

wybieramy znak $+$ i opuszczamy stałą.

$$E = \pm c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} \simeq \pm \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots \right)$$

Równanie Kleina-Gordona

Jak skonstruować równanie odpowiadające pierwiastkowi? Klein i Gordon:

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 \implies -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, t) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4 \right) \varphi(x, t)$$

Są kłopoty interpretacyjne. W nierelatywistycznej mechanice kwantowej

$$P = \psi^* \psi \quad \text{gęstość prawdopodobieństwa (dodatnia !!!!)}$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad \text{gęstość prądu prawdopodobieństwa}$$

spełniają równanie ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial t} P + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0,$$

co wynika z faktu, że równanie Schrödingera jest liniowe w pochodnej czasowej.

W przypadku równania Kleina-Gordona:

$$-\varphi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = \varphi^* \left(-c^2 \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \varphi$$

$$-\varphi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi^* = \varphi \left(-c^2 \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \varphi^*$$

odejmujemy stronami

$$\text{Lewa strona} = - \left(\varphi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \varphi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi^* \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi^* \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial t} \varphi^* \right)$$

$$\text{Prawa strona} = -c^2 \left(\varphi^* \vec{\nabla}^2 \varphi - \varphi \vec{\nabla}^2 \varphi^* \right) = -c^2 \vec{\nabla} \cdot \left(\varphi^* \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \varphi^* \right)$$

Mnożąc stronami przez

$$-\frac{\hbar}{2imc^2}$$

dostajemy równanie ciągłości z gęstością prawdopodobieństwa

$$P = -\frac{\hbar}{2imc} \left(\varphi^* \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial t} \varphi^* \right),$$

która nie jest odatnio określona (po pomnożeniu przez e można interpretować jako gęstość ładunku). Otrzymuje się złe spektrum atomu wodoru (Schrödinger).

Zasada wariacyjna w mechanice klasycznej

Równania klasyczne można otrzymać z zasady wariacyjnej.

$$S = \int_0^T dt \mathcal{L}(x, \dot{x})$$

Dokonajmy przesunięcia

$$x' = x + y, \quad \dot{x}' = \dot{x} + \dot{y}, \quad \text{gdzie } y(0) = y(T) = 0.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} S' &= \int_0^T dt L(x', \dot{x}') = \int_0^T dt L(x + y, \dot{x} + \dot{y}) \\ &= \int_0^T dt \left(L(x, \dot{x}) + \frac{\partial L}{\partial x} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y} + \dots \right). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\delta S &= S' - S = \int_0^T dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y} \right) \\ &= \int_0^T dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} y \Big|_0^T.\end{aligned}$$

Stąd równania ruchu:

$$\delta S = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Zasada wariacyjna dla pola skalarnego

Dla funkcji skalarnej φ wprowadzamy *gęstość* lagrangianu $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$, gdzie $\varphi(t, \vec{r})$ (lokalność).

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi). \quad x \rightarrow \varphi, \quad \frac{dx}{dt} \rightarrow \partial_\mu\varphi.$$

$$\delta S = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0.$$

Jak wygląda \mathcal{L} (przyjmujemy $\hbar = 1$ i $c = 1$)?

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu\varphi \partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu\varphi \partial_\nu\varphi - m^2\varphi^2).$$

Zadanie: przeprowadzić jawnie rachunek wariacyjny dla pola φ i wstawić \hbar i c do \mathcal{L} .

Rozwiązania równania Kleina-Gordona

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \varphi(t, \vec{r}) = 0.$$

Rozwiązanie falowe:

$$\begin{aligned} \varphi_k(t, \vec{r}) &= a_k \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t + \theta_k \right) \\ \omega_k^2 &= \vec{k}^2 + m^2. \end{aligned}$$

Zamykając układ w pudle o długości l i objętości $V = l^3$ narzucając *periodyczne* warunki brzegowe mamy

$$\vec{k} = \left(\frac{2\pi n_1}{l}, \frac{2\pi n_2}{l}, \frac{2\pi n_3}{l} \right), \quad n_{1,2,3} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Rozwiązanie falowe:

$$\varphi_k(t, \vec{r}) = a_k \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t + \theta_k)$$
$$\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2.$$

Ogólne rozwiązanie jest superpozycją takich fal

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right).$$

Czynnik $\sqrt{2\omega_k}$ jest konwencją (uwaga, ω_k może być dodatnie lub ujemne, wtedy trzeba wziąć moduł).

Pole φ jest rzeczywiste!

Pole φ opisuje cząstkę skalarną (np. bozon Higsa lub mezon π^0).

Tensor energii-pędu

W mechanice klasycznej energia (hamiltonian) dane są przez transformację Legendre'a

$$H = p \dot{q} - L$$

Zachowanie energii-pędu jest konsekwencją symetrii względem translacji (także czasowych):

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta a^\mu \quad \delta a^\mu \text{ nie zależy od } t \text{ i od } x$$

wtedy

$$\begin{aligned} \varphi(x^\mu + \delta a^\mu) &= \varphi(x) + (\partial_\nu \varphi(x)) \delta a^\nu \\ &\rightarrow \delta \varphi = (\partial_\nu \varphi(x)) \delta a^\nu \end{aligned}$$

i dalej

$$\delta \mathcal{L}(\varphi, \partial \varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi).$$

Używając r. ruchu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \quad \text{oraz} \quad \delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta \varphi)$$

mamy

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{L} &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi) \\
 &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right] \quad \delta \varphi = \varphi(x^\nu + \delta a^\nu) - \varphi(x) = (\partial_\nu \varphi) \delta a^\nu \\
 &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \right] \delta a^\nu.
 \end{aligned}$$

Z kolei

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} \delta a^\mu = (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta^\mu_\nu \delta a^\nu$$

i w konsekwencji

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right] \delta a^\nu = 0.$$

Ponieważ stałe δa^ν są dowolne, mamy zachowanie wielkości

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0, \text{ gdzie } T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$

jest tensorem energii-pędu.

Podobnie jak w mechanice klasycznej energia $H = p \dot{q} - L$ (gęstość energii):

$$T^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L}.$$

Równanie $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$ przyjmuje postać dla $\nu = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} T^0_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0,$$

gdzie

$$\vec{T} = (T^1_0, T^2_0, T^3_0).$$

Całkując po całej przestrzeni:

$$0 = \int d^3x \left(\frac{\partial}{\partial t} T^0_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^0_0 + \int_{\partial V \rightarrow \infty} d\vec{s} \cdot \vec{T} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^0_0$$

dostaliśmy prawo zachowania całkowitej energii pola skalarnego.

Składowe T^0_i mają interpretację gęstości pędu. Podobnie można pokazać zachowanie pędu.

W przypadku pola Kleina-Gordona

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2)$$

mamy

$$T^0_0 = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2).$$

Podstawiając rozwiązania r. Kleina-Gordona mamy

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -i \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(\omega_k \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} - \omega_k \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right) \\ \vec{\nabla} \varphi &= i \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(\vec{k} \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} - \vec{k} \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right) \end{aligned}$$

i używając wzoru

$$\frac{1}{V} \int d^3 x e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

otrzymujemy

$$H = \int d^3x T^0_0 = \sum_{\vec{k}} \omega_k a_k^* a_k,$$

$$\vec{P} = \int d^3x \vec{T}^0 = \sum_{\vec{k}} \vec{k} a_k^* a_k.$$

Wyprowadzenie (weźmy rozwiązanie z dodatnimi ω_k):

$$\begin{aligned}
 \int d^3x \dot{\varphi}^2 &= -\frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sqrt{\omega_k \omega_{k'}} \int d^3x \times \\
 &\left[a_k a_{k'} e^{i((\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r} - (\omega + \omega')t)} + a_k^* a_{k'}^* e^{-i((\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r} - (\omega + \omega')t)} \right. \\
 &\left. - a_k a_{k'}^* e^{i((\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} - (\omega - \omega')t)} - a_k^* a_{k'} e^{-i((\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} - (\omega - \omega')t)} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k \left(a_k a_{-k} e^{-2i\omega t} + a_k^* a_{-k}^* e^{+2i\omega t} - 2a_k a_k^* \right).
 \end{aligned}$$

Podobnie:

$$\begin{aligned}
 \int d^3x (\vec{\nabla} \varphi)^2 &= -\frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}'}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \int d^3x \times \\
 &\quad \left[a_k a_{k'} e^{i((\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r} - (\omega + \omega')t)} + a_k^* a_{k'}^* e^{-i((\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r} - (\omega + \omega')t)} \right. \\
 &\quad \left. - a_k a_{k'}^* e^{i((\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} - (\omega - \omega')t)} - a_k^* a_{k'} e^{-i((\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} - (\omega - \omega')t)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{k^2}{\omega_k} \left(a_k a_{-k} e^{-2i\omega t} + a_k^* a_{-k}^* e^{+2i\omega t} + 2a_k a_k^* \right),
 \end{aligned}$$

gdzie $\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2$.

A także

$$\begin{aligned}
\int d^3x \varphi^2 &= \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}} \int d^3x \times \\
&\left[a_k a_{k'} e^{i((\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega+\omega')t)} + a_k^* a_{k'}^* e^{-i((\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega+\omega')t)} \right. \\
&\left. + a_k a_{k'}^* e^{i((\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega-\omega')t)} + a_k^* a_{k'} e^{-i((\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega-\omega')t)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega} \left(a_k a_{-k} e^{-2i\omega t} + a_k^* a_{-k}^* e^{+2i\omega t} + 2a_k a_k^* \right).
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\int d^3x T^0_0 &= \frac{1}{2} \int d^3x \left(\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}} \frac{-\omega_k^2 + k^2 + m^2}{\omega_k^2} \left(a_k a_{-k} e^{-2i\omega t} + a_k^* a_{-k}^* e^{+2i\omega t} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{\omega^2 + k^2 + m^2}{\omega_k} a_k a_k^* \\
&= \sum_{\vec{k}} \omega_k a_k^* a_k,
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $\omega^2 = k^2 + m^2$ (warunek *on shell*). Ważne, że skorzystaliśmy dwa razy z warunku *on shell*, raz żeby dostać zero i raz, żeby dostać czynnik 2. Jak to będzie dla ujemnych energii?

Skalarne pole zespolone

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2)$$

Przekonamy się, że Φ ma ładunek q , a Φ^* ładunek $-q$. Gęstość lagrangianu (rzeczywista)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi$$

prowadzi do r. ruchu, gdzie pola Φ i Φ^* traktujemy jako *niezależne*:

$$-\partial_\mu \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi = 0$$

i analogicznie dla Φ^* . Zatem rozwiązania

$$\Phi(t, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \frac{b_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right),$$

gdzie a_k i b_k są *niezależnymi* liczbami zespolonymi. Można pokazać, że energia

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_k (a_k^* a_k + b_k^* b_k)$$

(suma energii dwóch rzeczywistych pól skalarnych).