

Model z lokalną symetrią $SU(2) \times U(1)$

Dla pełnej teorii z symetrią $SU(2) \times U(1)$:

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)\tau_0} U \Phi \\ U &= e^{-i\vec{\alpha}(x) \cdot \vec{\tau}}\end{aligned}$$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{dyn} + \mathcal{L}_{\Phi}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{dyn} &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{8} \text{Tr}(\mathbf{W}_{\mu\nu} \mathbf{W}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{\Phi} &= (D_{\mu} \Phi)^{\dagger} (D^{\mu} \Phi) - V(\Phi^{\dagger} \Phi)\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}B_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu}, \\ \mathbf{W}_{\mu\nu} &= D_{\mu} \mathbf{W}_{\nu} - D_{\nu} \mathbf{W}_{\mu}.\end{aligned}$$

pochodna kowariantna

$$D^{\mu} = \partial^{\mu} + i\frac{g_1}{2} B^{\mu} + i\frac{g_2}{2} \mathbf{W}^{\mu}$$

Łamanie lokalnej symetrii SU(2)

Chcemy teraz nadać masę bozonom W a pozostawić bezmasowy foton, czyli bozon grupy U(1). W tym celu potencjał wybieramy jak poprzednio:

$$\begin{aligned} V(\Phi^\dagger\Phi) &= \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2]^2 \\ &= \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 - \phi_0^2]^2 \end{aligned}$$

gdź

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{bmatrix}.$$

Podobnie jak w przypadku łamania symetrii U(1) możemy tak wybrać cechowanie SU(2), żeby

$$\Phi_A = 0, \quad \Phi_B = \text{rzeczywiste}.$$

Są to w sumie 3 warunki, które odpowiadają wyborowi trzech z czterech parametrów transformacji cechowania $(\theta(x), \vec{\alpha}(x))$. Wybieramy

$$\Phi_{\text{vac}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{bmatrix},$$

a wzbudzenia mają postać

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x) \end{bmatrix}.$$

Takie pole jest niezmiennicze względem transformacji (czwarty stopień swobody):

$$\Phi' = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x) \end{bmatrix} = \Phi$$

Macierz

$$\begin{bmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{-i\varphi/2} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\varphi/2} \end{bmatrix} = e^{-i\varphi/2} e^{-i\varphi\tau_3/2} = e^{-i\varphi/2} U_3(\varphi/2).$$

Jest to równoczesna transformacja $U(1) \in U(1) \times SU(2)$.

Przy takim wyborze Φ : $\phi_3 = \phi_0 + h/\sqrt{2}$, pozostałe są równe zero:

$$\begin{aligned} V(\Phi^\dagger\Phi) &= \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left[\left(\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h \right)^2 - \phi_0^2 \right]^2 \\ &= \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left[\frac{1}{2}h^2 + \sqrt{2}\phi_0 h \right]^2 = \\ &= m^2 h^2 + \frac{m^2}{\sqrt{2}\phi_0} h^3 + \frac{m^2}{8\phi_0^2} h^4. \end{aligned}$$

Mamy więc jedno pole skalarne h o masie $\sqrt{2}m$.

Pochodna kowariantna:

$$\begin{aligned}
D_\mu \Phi &= \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \mathbf{W}_\mu \right) \Phi \\
&= \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B_\mu + i\frac{g_2}{2} \begin{bmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + h/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_\mu h/\sqrt{2} \end{bmatrix} + i\frac{g_1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ B_\mu (\phi_0 + h/\sqrt{2}) \end{bmatrix} + i\frac{g_2}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}W_\mu^+ \\ -W_\mu^3 \end{bmatrix} (\phi_0 + h/\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Człon kinetyczny jest rzeczywisty, zawiera człony masowe:

$$\begin{aligned}
(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \left\{ \frac{g_1^2}{4} B^\mu B_\mu + \frac{g_2^2}{4} (2W^{-\mu} W_\mu^+ + W^{3\mu} W_\mu^3) \right\} (\phi_0 + h/\sqrt{2})^2 \\
&\quad - \frac{g_1 g_2}{2} B^\mu W_\mu^3 (\phi_0 + h/\sqrt{2})^2
\end{aligned}$$

Trzeba zdiagonalizować formę kwadratową:

$$F = g_1^2 B^2 - 2g_1 g_2 B W^3 + g_2^2 (W^3)^2$$

definiując nowe pola:

$$\begin{aligned} B &= A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W \\ W^3 &= Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W \end{aligned}$$

co daje

$$\begin{aligned} F &= g_1^2 (A^2 \cos^2 \theta_W - 2AZ \sin \theta_W \cos \theta_W + Z^2 \sin^2 \theta_W) \\ &\quad - 2g_1 g_2 (AZ(\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) + (A^2 - Z^2)) \sin \theta_W \cos \theta_W \\ &\quad + g_2^2 (Z^2 \cos^2 \theta_W + A^2 \sin^2 \theta_W + 2AZ \sin \theta_W \cos \theta_W) \end{aligned}$$

Współczynnik przy $-2AZ$:

$$(g_1^2 - g_2^2) \sin \theta_W \cos \theta_W + g_1 g_2 (\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) = 0.$$

Widać, że rozwiązanie ma postać

$$\cos \theta_W = g_2 \mathcal{N}, \quad \sin \theta_W = g_1 \mathcal{N}.$$

Rzeczywiście

$$\mathcal{N}^2 [(g_1^2 - g_2^2) g_1 g_2 + g_1 g_2 (g_2^2 - g_1^2)] = 0.$$

Z normalizacji

$$\sin^2 \theta_W + \cos^2 \theta_W = \mathcal{N}^2 (g_1^2 + g_2^2),$$

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}},$$

$$\sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

Zostaje

$$\begin{aligned} F &= g_1^2 (A^2 \cos^2 \theta_W + Z^2 \sin^2 \theta_W) - 2g_1g_2(A^2 - Z^2) \sin \theta_W \cos \theta_W \\ &+ g_2^2 (Z^2 \cos^2 \theta_W + A^2 \sin^2 \theta_W) \\ &= A^2 (g_1^2 \cos^2 \theta_W - 2g_1g_2 \sin \theta_W \cos \theta_W + g_2^2 \sin^2 \theta_W) \\ &+ Z^2 (g_1^2 \sin^2 \theta_W + 2g_1g_2 \sin \theta_W \cos \theta_W + g_2^2 \cos^2 \theta_W). \end{aligned}$$

Widać, że współczynnik przy A^2 jest równy zero!!!! Dalej

$$F = Z^2 \frac{1}{g_1^2 + g_2^2} (g_1^4 + 2g_1^2g_2^2 + g_2^4) = (g_1^2 + g_2^2)Z^2.$$

Zatem

$$(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) = \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \left\{ \frac{g_1^4}{2} W^{-\mu} W_\mu^+ + \frac{(g_1^2 + g_2^2)}{4} Z^\mu Z_\mu \right\} \left(\phi_0 + h/\sqrt{2} \right)^2$$

Jak taki obrót

$$\begin{aligned}B_\mu &= A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W \\W_\mu^3 &= Z_\mu \cos \theta_W + A_\mu \sin \theta_W\end{aligned}$$

zmienia człon kinetyczny dla pól cechowania?

$$\begin{aligned}B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\W_{\mu\nu}^3 &= \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g_2(W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\nu^1 W_\mu^2) \\&= \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - ig_2(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+)\end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}B_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu} \cos \theta_W - Z_{\mu\nu} \sin \theta_W \\W_{\mu\nu}^3 &= Z_{\mu\nu} \cos \theta_W + A_{\mu\nu} \sin \theta_W - ig_2(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+)\end{aligned}$$

gdzie:

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu,$$

Rozpatrzmy po kolei:

$$\begin{aligned}
B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} &= A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \cos^2 \theta_W + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \sin^2 \theta_W - 2A_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \cos \theta_W \sin \theta_W \\
W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} &= A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \sin^2 \theta_W + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \cos^2 \theta_W + 2A_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \cos \theta_W \sin \theta_W \\
&\quad - 2ig_2 (Z^{\mu\nu} \cos \theta_W + A^{\mu\nu} \sin \theta_W) (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+)
\end{aligned}$$

stąd:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{dyn} &= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} \\
&\quad + \frac{ig_2}{2} (Z^{\mu\nu} \cos \theta_W + A^{\mu\nu} \sin \theta_W) (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+)
\end{aligned}$$

W sumie pełny lagrangian

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \frac{m^2}{2\phi_0^2} [\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2]^2 - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,\end{aligned}$$

gdzie

$$D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g_1}{2} B^\mu + i\frac{g_2}{2} \mathbf{W}^\mu,$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x)/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Wolne parametry

$$\boxed{g_1, g_2, \phi_0, m}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 \\
&- \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \\
&- \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \\
&- \frac{1}{2} (\Delta_\mu^* W_\nu^- - \Delta_\nu^* W_\mu^-) (\Delta^\mu W^{+\nu} - \Delta^\nu W^{+\mu}) + \frac{1}{2} g_2^2 \phi_0^2 W_\mu^- W^{+\mu}
\end{aligned}$$

gdzie: $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ oraz pochodna kowariantna

$$\Delta_\mu W_\mu^+ = (\partial_\mu + i g_2 \sin \theta_W A_\mu) W_\mu^+$$

$$\Delta_\mu^* W_\mu^+ = (\partial_\mu - i g_2 \sin \theta_W A_\mu) W_\mu^-$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 \quad \longleftarrow \text{ masywne pole skalarne}$$

$$- \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu$$

↑ masywne pole wektorowe

$$- \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \quad \longleftarrow \text{ bezmasowe pole wektorowe}$$

↓ masywne, naładowane pole wektorowe

$$- \frac{1}{2} (\Delta_\mu^* W_\nu^- - \Delta_\nu^* W_\mu^-) (\Delta^\mu W^{+\nu} - \Delta^\nu W^{+\mu}) + \frac{1}{2} g_2^2 \phi_0^2 W_\mu^- W^{+\mu}$$

gdzie: $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ oraz pochodna kowariantna

$$\Delta_\mu W_\mu^+ = (\partial_\mu + i g_2 \sin \theta_W A_\mu) W_\mu^+$$

$$\Delta_\mu^* W_\mu^+ = (\partial_\mu - i g_2 \sin \theta_W A_\mu) W_\mu^-$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 \quad \longleftarrow \text{ masywne pole skalarne}$$

$$- \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu$$

↑ masywne pole wektorowe

$$- \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \quad \longleftarrow \text{ bezmasowe pole wektorowe}$$

↓ masywne, naładowane pole wektorowe

$$- \frac{1}{2} (\Delta_\mu^* W_\nu^- - \Delta_\nu^* W_\mu^-) (\Delta^\mu W^{+\nu} - \Delta^\nu W^{+\mu}) + \frac{1}{2} g_2^2 \phi_0^2 W_\mu^- W^{+\mu}$$

gdzie: $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ oraz pochodna kowariantna

$$\Delta_\mu W_\mu^+ = \left(\partial_\mu + i \underbrace{g_2 \sin \theta_W}_{e} A_\mu \right) W_\mu^+$$

$$\Delta_\mu^* W_\mu^+ = \left(\partial_\mu - i \underbrace{g_2 \sin \theta_W}_{e} A_\mu \right) W_\mu^-$$

Parametry:

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

$$e = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W$$

$$M_W = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 g_2$$

$$M_Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$$

$$M_h = \sqrt{2} m$$

Parametry (2007):

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

$$e = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W$$

$$M_W = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 g_2 = 80.403 \pm 0.029 \text{ GeV}$$

$$M_Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$$

$$M_h = \sqrt{2} m > 114.4 \text{ GeV}, \text{ CL} = 95\%$$

Parametry (2007):

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

$$e = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W$$

$$M_W = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 g_2 = 80.403 \pm 0.029 \text{ GeV}$$

$$\implies \cos \theta_W = \frac{M_W}{M_Z} = 0.8817 \implies \sin^2 \theta_W = 0.2226$$

$$M_Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$$

$$M_h = \sqrt{2} m > 114.4 \text{ GeV}, \text{ CL} = 95\%$$

Parametry (2007):

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

$$e = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W$$

$$M_W = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 g_2 = 80.403 \pm 0.029 \text{ GeV}$$

$$\implies \cos \theta_W = \frac{M_W}{M_Z} = 0.8817 \quad \sin^2 \theta_W = \mathbf{0.2315}$$

$$M_Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0 \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$$

$$M_h = \sqrt{2} m > 114.4 \text{ GeV, CL} = 95\%$$

Wartość próżniowa pola Higgsa:

$$\phi_0 = \sqrt{2} \frac{M_W}{g_2} = \sqrt{2} \frac{M_W}{e} \sin \theta_W = 180 \text{ GeV (jednostki!!!!)}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 = & -\frac{m^2}{\sqrt{2}\phi_0}h^3 - \frac{m^2}{8\phi_0^2}h^4 \\
& + \left(\frac{1}{4}h^2 + \frac{\phi_0}{\sqrt{2}}h \right) \left(g_2^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{2}(g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right) \\
& + \frac{g_2^2}{4} (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+) (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{-\nu} W^{+\mu}) \\
& + i\frac{g_2}{2} (Z_{\mu\nu} \cos \theta_W + A_{\mu\nu} \sin \theta_W) (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{-\nu} W^{+\mu}) \\
& - g_2^2 \cos^2 \theta_W (Z_\mu Z^\mu W_\nu^- W^{+\nu} - Z_\mu Z^\nu W_\nu^- W^{+\mu}) \\
& + i\frac{g_2}{2} \cos \theta_W \times \\
& \left\{ (Z_\mu W_\nu^- - Z_\nu W_\mu^-) (\Delta^{\mu} W^{+\nu} - \Delta^{\nu} W^{+\mu}) - (Z_\mu W_\nu^+ - Z_\nu W_\mu^+) (\Delta^{*\mu} W^{-\nu} - \Delta^{*\nu} W^{-\mu}) \right\}
\end{aligned}$$

W \mathcal{L}_1 praktycznie nie widać wyjściowej symetrii $U(1) \times SU(2)$. Jednakże właśnie ten skomplikowany układ wzajemnie powiązanych oddziaływań czyni teorię *renormalizowalną*.

Policzmy stopnie swobody:

- Przed złamaniem symetrii

1. Φ : dublet $SU(2)$ zespolonych pól skalarnych – 4
2. B_μ : jedno bezmasowe pole wektorowe $U(1)$ – 2
3. \mathbf{W}_μ : trzy bezmasowe pola wektorowe $SU(2)$ – 6

W sumie: **12** stopni swobody

- Po złamaniu symetrii:

1. h : masywne rzeczywiste pole skalarne (Higgs) – 1
2. A_μ : foton, bezmasowe pole wektorowe – 2
3. Z_μ : masywne, neutralne pole wektorowe – 3
4. W_μ^\pm : dwa masywne pola wektorowe – 6

W sumie: **12** stopni swobody

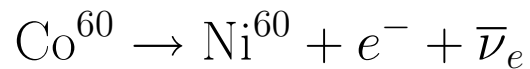
Uwaga: Pola związane z grupą $U(1)$ ($e^{-i\theta\tau_0}$) i z podgrupą $U(1)$ grupy $SU(2)$ ($e^{-i\alpha_3\tau_3}$) mieszają się dając foton i bozon Z .

Jak dołączyć do tego modelu fermiony?

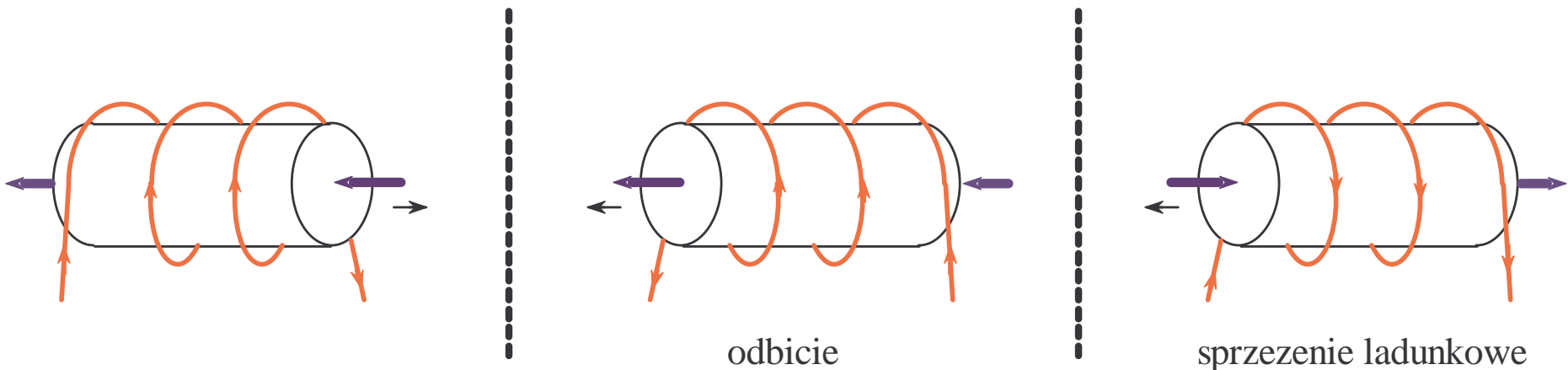
Trzeba użyć pewnych informacji doświadczalnych.

Oddziaływania słabe nie zachowują symetrii \mathbf{P} .

Doświadczenie Wu: solaryzowana próbka jąder Co^{60} (temperatura 1 K) – łamanie \mathbf{P}



Obserwuje się, że większa liczba elektronów jest emitowana w kierunku przeciwnym do ustawienia spinów.



Polaryzacja elektronów

Rozkład lewoskrętnego pola fermionowego w bazie helicity:

$$\begin{aligned} \psi_L = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \\ & \left[\left(b_{\vec{p}+} e^{-\theta/2} |+\rangle + b_{\vec{p}-} e^{+\theta/2} |-\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right. \\ & \left. + \left(d_{\vec{p}+}^\dagger e^{+\theta/2} |-\rangle + d_{\vec{p}-}^\dagger e^{-\theta/2} |+\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right] \end{aligned}$$

Pamiętamy, że

$$\sqrt{\frac{m}{E}} e^{\theta/2} = \sqrt{1 + \frac{v}{c}}, \quad \sqrt{\frac{m}{E}} e^{-\theta/2} = \sqrt{1 - \frac{v}{c}}$$

co daje

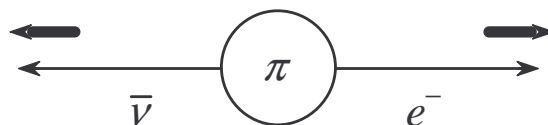
$$\begin{aligned} \psi_L = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\left(\sqrt{1 - \frac{v}{c}} b_{\vec{p}+} |+\rangle + \sqrt{1 + \frac{v}{c}} b_{\vec{p}-} |-\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right. \\ & \left. + \left(\sqrt{1 + \frac{v}{c}} d_{\vec{p}+}^\dagger |-\rangle + \sqrt{1 - \frac{v}{c}} d_{\vec{p}-}^\dagger |+\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p} \cdot \vec{r})} \right] \end{aligned}$$

Jeżeli elektron jest w rozpadzie β produkowany jako stan lewoskrętny to jego podłużna polaryzacja jest dana wzorem:

$$\begin{aligned} P &= 1 \times P_L(+)+ (-1) \times P_L(-) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c} \right) = -\frac{v}{c} \end{aligned}$$

Im bardziej relatywistyczny elektron, tym bardziej jest spolaryzowany. To się obserwuje.

Rozpad pionu



Obserwuje się rozpady:

$$\pi^{+(-)} \rightarrow \mu^{+(-)} + \overset{(-)}{\nu}_{\mu}, \quad \pi^{+(-)} \rightarrow e^{+(-)} + \overset{(-)}{\nu}_e.$$

Jednak, rozpady na elektron są rzadsze (mimo, że jest więcej przestrzeni fazowej):

$$\frac{1}{\tau}(\pi \rightarrow \mu) = 10^4 \times \frac{1}{\tau}(\pi \rightarrow e)$$

Prawdopodobieństwo złej polaryzacji elektronu (mionu)

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \frac{m_l^2}{m_{\pi}^2 + m_l^2}$$

Pamiętajmy, że

$$\frac{v}{c} = \tanh \theta = \frac{p_l}{E_l} \quad (\text{wykład 4})$$

Mamy

$$m_\pi = E_l + E_\nu, \quad E_\nu = p_\nu = p_l, \quad E_l^2 = p_l^2 + m_l^2.$$

Z pierwszego równania

$$E_l^2 = (m_\pi - E_\nu)^2 = (m_\pi - p_l)^2 = p_l^2 + m_l^2,$$

co pozwala wyliczyć p_l :

$$p_l = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}.$$

Z kolei energia

$$E_l = m_\pi - E_\nu = m_\pi - p_l = m_\pi - \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_\pi}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c} \right) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p_l}{E_l} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{m_\pi^2 + m_l^2} \right) \\ &= \frac{m_l^2}{m_\pi^2 + m_l^2} = \begin{cases} 1.24 \times 10^{-5} & \text{dla } e \\ 0.36 & \text{dla } \mu \end{cases} \end{aligned}$$

To tylko wskazówka. Trzeba skonstruować model dynamiczny sprzęgający pion do leptonu i neutrino, uwzględnić przestrzeń fazową. Ale mamy pierwsze wnioski:

- neutrino są (prawie) bezmasowe
- w oddziaływaniach słabych biorą udział leptony lewoskrętne

Teoria Fermiego

Prądy:

$$j_\nu = \bar{\psi}_e \gamma_\nu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \nu_e + \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \nu_\mu + \bar{\psi}_\tau \gamma_\nu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \nu_\tau$$

oddziaływanie

$$\mathcal{L} = -2\sqrt{2}G_F g^{\nu\mu} j_\nu j_\mu^\dagger$$
$$G_F = 1.16639 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}.$$

Pamiętajmy (wykład 3)

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_L \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_R \end{bmatrix}$$

Będziemy chcieli zastąpić

$$G_F g^{\nu\mu} \rightarrow D^{\nu\mu}$$

propagator

$$D^{\nu\mu} \sim \frac{g^{\nu\mu}}{p^2 - M^2}$$