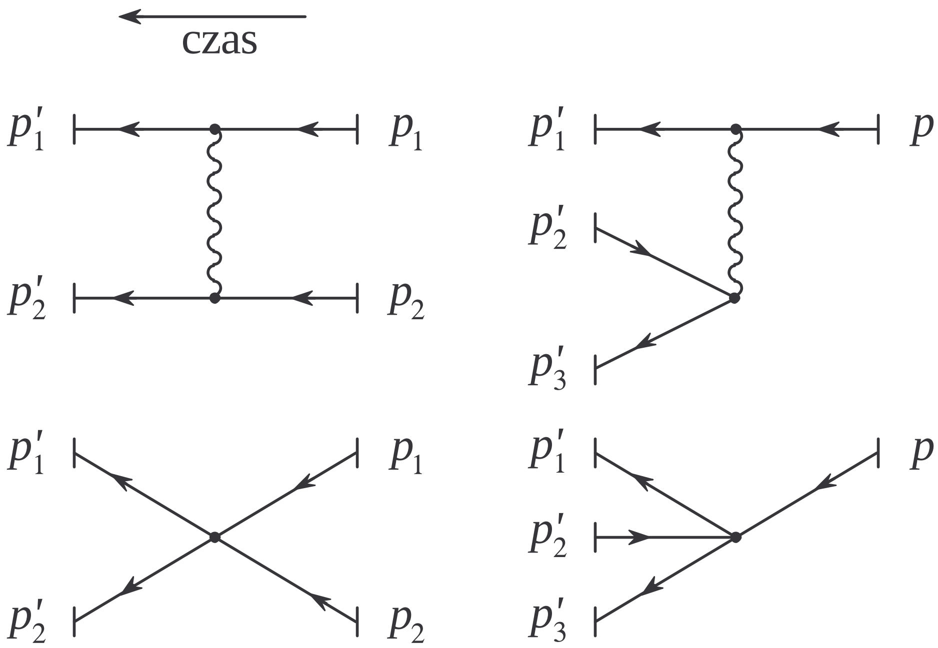
Oddziaływania słabe

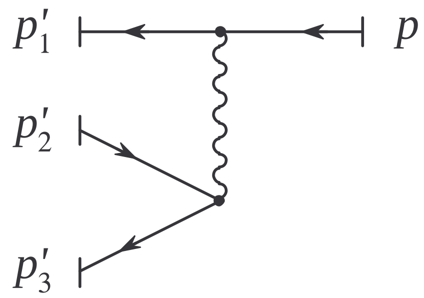
Rozpady:

$$ {}^{17}_{9}F \rightarrow {}^{17}_{8}O + e^{+} + \nu_e $$

$$ n \rightarrow p + e + \overline{\nu}_e $$

zachodzą poprzez oddziaływania zwwane słabymi, gdyż średni czas życia wynosi minuty, podczas gdy typowy czas rozpadów elektomagnetycznych to 10^{-15} s. Jak opisać takie oddziaływania?





Gdyby foton miał masę, to amplituda rozpadu miałaby postać:

$$\mathcal{M}_2 = \frac{ie^2}{(p_2' + p_3')^2 - M^2} \left[\overline{u}_{\varepsilon_1}(p_1')\gamma^\mu u_\varepsilon(p)\right] \left[v_{\varepsilon_2}(p_2')\gamma_\mu \overline{u}_{\varepsilon_3}(p_3')\right]$$

Jeżeli $M^2 \gg (p_2' + p_3')^2$ to mamy oddziaływanie czterofermionowe.

Pytania:

- Jak nadać "fotonowi"masę, aby nie złamać symetrii cechowania?
- Jak nadać "fotonowi"ładunek, by $n \to p$?
- Jak sprzęgać "foton"do fermionów: γ^μ , czy jakoś inaczej?

Łamanie symetrii w modelach teoriopolowych

Rozważmy zepolone pole skalarne:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\,\phi_2\right).$$

Gęstość lagrangianu (rzeczywista)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi = \frac{\partial \Phi^\dagger}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi^\dagger \cdot \vec{\nabla}\Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

gdzie gęstość potencjału identyfikujemy jako:

$$\vec{\nabla}\Phi^\dagger \cdot \vec{\nabla}\Phi + m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

Minimum jest dla stałego pola, gdzie jedyny przyczynek jest od członu masowego i minimum potencjału wypada dla $\Phi = 0$.

Co się stanie gdy zmienimy znak m^2? Niestabilność!

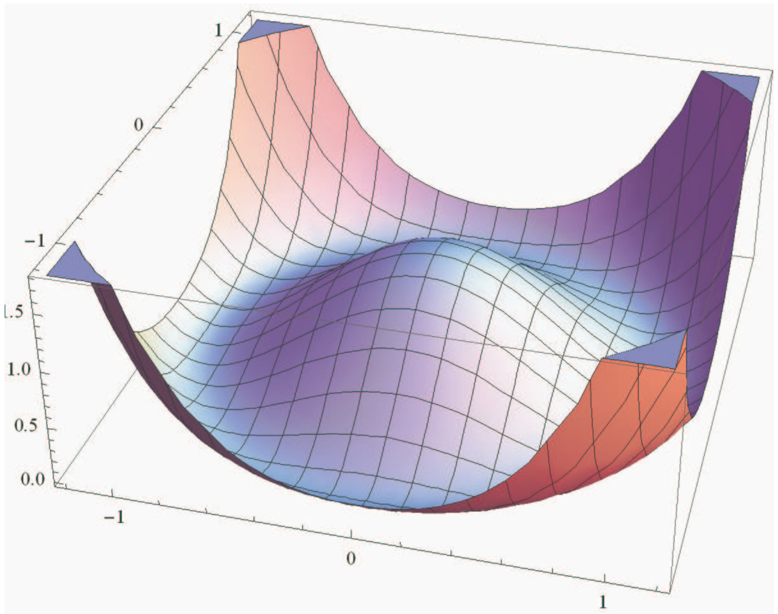
Wybierzmy

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2\right]^2,$$

gdzie ϕ_0 jest stałą. Wtedy

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - V(\Phi^\dagger\Phi).$$

Wtedy minimum potencjału jest dla modułu $|\Phi| = \phi_0$. (Rysunek).



Swoboda wybory kierunku, bo w minimum

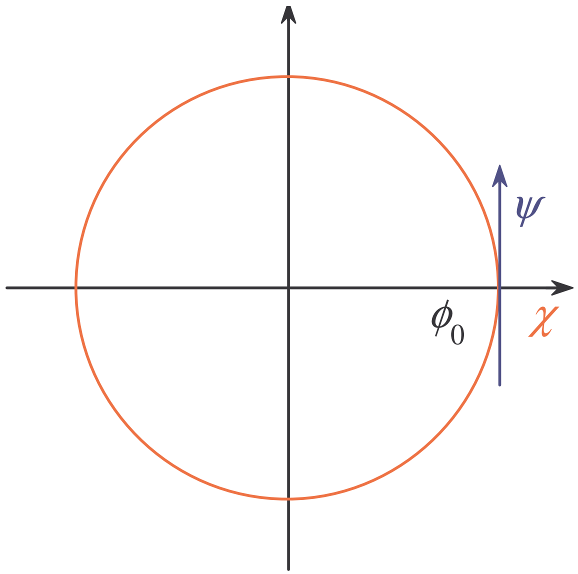
$$\frac{1}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) = \phi_0^2.$$

Czyli mamy symetrię globalną U(1):

$$\Phi \to e^{-i\alpha}\Phi.$$

Jednak system musi wybrać jakiś kierunek i wtedy następuje *spontaniczne łamanie symetrii* U(1). Symetria lagrangianu nie jest symetrią próżni. Niech próżnia ma postać

$$\Phi_0 = (\phi_0, 0)$$



Wtedy pole *dynamiczne*

$$\Phi = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi(x) + i\psi(x)).$$

Przepiszmy lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\sqrt{2}\phi_0\chi + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\psi^2 + \underbrace{\phi_0^2}_{\text{stała}}\right]^2$$

Opuśćmy stałą i podnieśmy nawias do kwadratu

$$[\ldots]^2 = 2\phi_0^2\chi^2 + \text{wyższe potegi}$$

Wyższe potegi to oddziaływanie. Mamy

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - m^2\chi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi + \mathcal{L}_{\text{int}}.$$

Mamy:

- masowe pole χ
- bezmasowe pole ψ (bozon Goldsone'a)

Przykład zastosowań: łamanie symetrii chiralnej SU(2), trzy bozony Goldstone: mezony π.

Łamanie symetrii lokalnej

Żądanie symetrii lokalnej

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\Phi(x)$$

dodaje pole wektorowe:

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_\mu - iqA_\mu)\,\Phi^\dagger\right]\,\left[(\partial^\mu + iqA^\mu)\,\Phi\right] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - V(\Phi^\dagger\Phi),$$

gdzie $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Symetria cechowania wymaga by

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x).$$

Pochodna została zastąpiona przez pochodną kowariantną:

$$\partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$$

Potencjał wybieramy jak poprzednio

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2\right]^2.$$

Różnica z poprzednim przypadkiem jest taka, że czynnik fazowy zależy od x i zawsze możemy tak wybrać cechowanie, żeby $\Phi'(x)$ było rzeczywiste

$$\Phi'(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} h(x), \quad h(x) - \text{rzeczywiste.}$$

Wtedy:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

gdzie

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + q^2 \phi_0^2 A_\mu A^\mu.$$

Pole fotonowe ma masę proporcjonalną do średniej próżniowej pola Φ i stałej sprzężenia (ładunku) q^2.

Dla kompletu

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q^2 A_\mu A^\mu \left(\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \right) - \frac{m^2}{2\phi_0^2} h^2 \left(\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{4} h^2 \right).$$

Przed złamaniem symetrii mieliśmy 4 stopnie swobody:

- bezmasowe pole wektorowe – 2 stopnie swobody,
- zespolone pole skalarne – 2 stopnie swobody,

po złamaniu symetrii mamy

- masowe pole wektorowe – 3 stopnie swobody,
- jedno skalarne pole rzeczywiste – 1 stopień swobody.

Zjawisko zamiany jednego pola skalarnego na masę pola wektorowego nosi nazwę mechanizmu Higgsa, a pole skalarne h nazywamy polem Higgsa.

Łamanie symetrii globalnej

Twierdzenie Goldstone'a:

Na każdy *złamany* generator przypada bezmasowa cząstka zwana bozonem Goldstone'a. W naszym przykładzie grupa U(1) miała tylko jeden generator i została całkowcie złamana.

Łamanie symetrii lokalnej

Mechanizm Higgsa:

Bezmasowy bozon Goldstone'a zostaje *zjedzony* przez pole wektorowe i dostarcza mu polaryzacji podłużnej; pole wektorowe uzyskuje masę.

Symetria SU(2)×U(1)

Wystartujmy z lagrangianu, który oprócz symetrii U(1) ma symetrię SU(2) (Yang, Mills 1954):

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{bmatrix}.$$

Niech U będzie unitarną macierzą 2×2

$$U = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}}, \quad U^\dagger U = UU^\dagger = 1$$

gdzie $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ jest zbiorem trzech parametrów *rzeczywistych*, $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ jest wektorem macierzy Pauliego (generatory symetrii SU(2)). Dodatkowo rozważmy mnożenie przez fazę

$$e^{-i\theta\tau_0}$$

gdzie τ_0 jest macierzą jednostkową 2×2. Postulujemy symetrię potencjału

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-i\theta\tau_0} U\Phi.$$

Lagrangian

$$\mathcal{L}_\Phi = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger\Phi),$$

gdzie

$$\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi = \sum_{i=1}^{4} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i,$$

$$\Phi^\dagger \Phi = \sum_{i=1}^{4} \phi_i^2.$$

Lokalna symetria SU(2)×U(1)

Niezmienniczość względem

$$\theta \to \theta(x), \quad \vec{\alpha} \to \vec{\alpha}(x)$$

wymaga wprowadzenia pól cechowania.

Dla U(1) (tak jak poprzednio) wprowadzamy pole wektorowe $\vec{B}$

$$\begin{aligned} B_\mu(x) \to B'_\mu(x) &= B_\mu(x) + \frac{2}{g_1}\partial_\mu\theta \\ &= e^{-i\theta\tau_0} B_\mu(x) e^{i\theta\tau_0} + i\frac{2}{g_1}\left(\partial_\mu e^{-i\theta\tau_0}\right) e^{i\theta\tau_0} \end{aligned}$$

czynnik 2 jest kwestią konwencji. Wówczas pochodna

$$\partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g_1}{2}B^\mu$$

Jeśli zaniedbać $\vec{\alpha}$

$$\begin{aligned} D'_\mu \Phi' &= \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B'_\mu\right) \Phi' \\ &= \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} (e^{-i\theta\tau_0} B_\mu + i\frac{2}{g_1} \left(\partial_\mu e^{-i\theta\tau_0}\right)) e^{i\theta\tau_0}\right) e^{-i\theta\tau_0} \Phi \\ &= \left(\underline{\left(\partial_\mu e^{-i\theta\tau_0}\right)} + e^{-i\theta\tau_0} \partial_\mu + i\frac{g_1}{2} e^{-i\theta\tau_0} B_\mu - \underline{\left(\partial_\mu e^{-i\theta\tau_0}\right)}\right) \Phi \\ &= e^{-i\theta\tau_0} \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} B_\mu\right) \Phi = e^{-i\theta\tau_0} \left(D_\mu \Phi\right) \end{aligned}$$

dalej

$$\left(D'_\mu \Phi'\right)^\dagger = \left(D_\mu \Phi\right)^\dagger e^{i\theta\tau_0}$$

i w konsekwencji człon kinetyczny

$$\left(D^{\mu\prime} \Phi'\right)^\dagger \left(D'_\mu \Phi'\right) = \left(D^\mu \Phi^\dagger\right) \left(D_\mu \Phi\right)$$

jest niezmienniczy.

Pole cechowania SU(2)

Zamiast jednego pla $B_\mu(x)$ mamy trzy pola (pomijamy U(1))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_\mu(x) &= W_\mu^k(x)\tau_k = W_\mu^1(x)\tau_1 + W_\mu^2(x)\tau_2 + W_\mu^3(x)\tau_3 \\ &= \begin{bmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

gdyż

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli pole $\boldsymbol{W}_\mu$ transformuje się jako

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_\mu \to \boldsymbol{W}'_\mu &= U\boldsymbol{W}_\mu U^\dagger + i\frac{2}{g_2}\left(\partial_\mu U\right)U^\dagger \\ &= \left(U\boldsymbol{W}_\mu + i\frac{2}{g_2}\left(\partial_\mu U\right)\right)U^\dagger\end{aligned}$$

a pochodna kowariantna

$$\partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g_2}{2}\boldsymbol{W}^\mu$$

to

$$D'_\mu \Phi' = \left[\partial_\mu + i\frac{g_2}{2}\left(U\boldsymbol{W}_\mu + i\frac{2}{g_2}\left(\partial_\mu U\right)\right)U^\dagger\right]U\Phi$$
$$= \left[\left(\partial_\mu U\right) + U\partial_\mu + i\frac{g_2}{2}U\boldsymbol{W}_\mu - \left(\partial_\mu U\right)\right]\Phi = U\left(D_\mu \Phi\right)$$

i

$$\left(D'_\mu \Phi'\right)^\dagger = \left(D_\mu \Phi\right)^\dagger U^\dagger$$

i człon kinetyczny jest niezmienniczy:

$$\left(D'_\mu \Phi\right)^\dagger \left(D^{\mu\prime} \Phi'\right) = \left(D_\mu \Phi\right)^\dagger U^\dagger U \left(D^\mu \Phi\right) = \left(D_\mu \Phi\right)^\dagger \left(D^\mu \Phi\right).$$

Pełna symetria U(1)×SU(2)

Transformacja cechowania

$$
\begin{aligned}
\Phi &\to \Phi' = e^{-i\theta\tau_0} U \Phi, \\
D_\mu \Phi &\to D'_\mu \Phi' = e^{-i\theta\tau_0} U\, D_\mu \Phi \\
B_\mu &\to B'_\mu = \left(e^{-i\theta\tau_0} B_\mu + i\frac{2}{g_1} \left(\partial_\mu e^{-i\theta\tau_0}\right) \right) e^{i\theta\tau_0}, \\
\boldsymbol{W}_\mu &\to \boldsymbol{W}'_\mu = \left(U \boldsymbol{W}_\mu + i\frac{2}{g_2} \left(\partial_\mu U\right) \right) U^\dagger.
\end{aligned}
$$

Pochodna kowariantna ma postać:

$$
\partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g_1}{2} B^\mu + i\frac{g_2}{2} \boldsymbol{W}^\mu = \partial^\mu + i\frac{g_1}{2} B^\mu + i\frac{g_2}{2} W_\mu^k \tau_k
$$

Trzy pola W_μ^i maja tę samą stałą sprzężenia g_2 a pole abelowe B_μ inną stałą g.

Lagrangian pola Φ

$$
\mathcal{L}_\Phi = \left(D^\mu \Phi\right)^\dagger \left(D_\mu \Phi\right) - V(\Phi^\dagger \Phi)
$$

musi zostać uzupełniony o lagrangian dla pól B_μ oraz W_μ^k.

Pola cechowania: pole B_μ

Pole B_μ jest jak foton. Tensor pola

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

jest niezmienniczy ze względu na transformację

$$\begin{aligned} B_\mu \to B'_\mu &= \left(e^{-i\theta\tau_0} B_\mu + i\frac{2}{g_1}\left(\partial_\mu e^{-i\theta\tau_0}\right)\right) e^{i\theta\tau_0} \\ &= B_\mu + \frac{2}{g_1}\partial_\mu\theta. \end{aligned}$$

Zatem

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}.$$

Pola cechowania: pola W_μ^k

Ponieważ pola $\boldsymbol{W}_\mu$ nie komutują (są macierzami), musimy inaczej zdefiniować tensor pola:

$$\boldsymbol{W}_{\mu\nu} = D_\mu \boldsymbol{W}_\nu - D_\nu \boldsymbol{W}_\mu .$$

Taki tensor jest niezmienniczy (pomijamy transformację U(1))

$$\boldsymbol{W}'_{\mu\nu} = D'_\mu \boldsymbol{W}'_\nu - D'_\nu \boldsymbol{W}'_\mu = U \boldsymbol{W}_{\mu\nu} U^\dagger$$

Zbadajmy

$$D'_\mu \boldsymbol{W}'_\nu = [\partial_\mu + i\frac{g_2}{2}\underbrace{\left(U\boldsymbol{W}_\mu + i\frac{2}{g_2}\left(\partial_\mu U\right)\right) U^\dagger]}_{W'_\mu}\underbrace{\left(U\boldsymbol{W}_\nu + i\frac{2}{g_2}\left(\partial_\nu U\right)\right) U^\dagger}_{W'_\mu}$$

$$= \left\{ \left[\left(\partial_\mu U\right) \boldsymbol{W}_\nu + U\left(\partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu\right) + U\boldsymbol{W}_\nu \partial_\mu \right] + i\frac{2}{g_2}\left[\left(\partial_\mu \partial_\nu U\right) + \left(\partial_\nu U\right)\partial_\mu \right] \right\} U^\dagger$$
$$+ \left\{ i\frac{g_2}{2} U\boldsymbol{W}_\mu \boldsymbol{W}_\nu - U\boldsymbol{W}_\mu U^\dagger \left(\partial_\nu U\right) \right\} U^\dagger$$
$$+ \left\{ -\left(\partial_\mu U\right)\boldsymbol{W}_\nu - i\frac{2}{g_2}\left(\partial_\mu U\right) U^\dagger \left(\partial_\nu U\right) \right\} U^\dagger$$

Pola cechowania: pola W_μ^k

Ponieważ

$$UU^\dagger = 1$$

zatem

$$(\partial_\nu U)\, U^\dagger + U \left(\partial_\nu U^\dagger\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\partial_\nu U^\dagger\right) = -U^\dagger \left(\partial_\nu U\right) U^\dagger$$

i dalej

$$\begin{aligned} D'_\mu \boldsymbol{W}'_\nu = & \left\{U \left(\partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu\right) U^\dagger + U \boldsymbol{W}_\nu \left(\partial_\mu U^\dagger\right)\right\} + i\frac{2}{g_2}\left\{\left(\partial_\mu \partial_\nu U\right) U^\dagger + \left(\partial_\nu U\right)\left(\partial_\mu U^\dagger\right)\right\} \\ & + \left\{i\frac{g_2}{2} U \boldsymbol{W}_\mu \boldsymbol{W}_\nu U^\dagger + U \boldsymbol{W}_\mu \left(\partial_\nu U^\dagger\right)\right\} \\ & + \left\{i\frac{2}{g_2}\left(\partial_\mu U\right)\left(\partial_\nu U^\dagger\right)\right\} \end{aligned}$$

co daje ostatecznie

$$
\begin{aligned}
D'_\mu \boldsymbol{W}'_\nu = U & \left\{ (\partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu) + i\frac{g_2}{2} \boldsymbol{W}_\mu \boldsymbol{W}_\nu \right\} U^\dagger \\
& + U \left\{ \boldsymbol{W}_\nu \left(\partial_\mu U^\dagger \right) + \boldsymbol{W}_\mu \left(\partial_\nu U^\dagger \right) \right\} \\
& i\frac{2}{g_2} \left\{ (\partial_\mu \partial_\nu U) U^\dagger + (\partial_\nu U) \left(\partial_\mu U^\dagger \right) + (\partial_\mu U) \left(\partial_\nu U^\dagger \right) \right\}.
\end{aligned}
$$

Część symetryczna w indeksach $\mu\nu$ kasuje się w różnicy i mamy ostatecznie

$$
D'_\mu \boldsymbol{W}'_\nu - D'_\nu \boldsymbol{W}'_\mu = U \left(D_\mu \boldsymbol{W}_\nu - D_\nu \boldsymbol{W}_\mu \right) U^\dagger.
$$

Człon kinetyczny dla pól W^k_μ

Tensor pola można rozpisać

$$\boldsymbol{W}_{\mu\nu} = W^k_{\mu\nu}\tau_k,$$

gdzie

$$W^1_{\mu\nu} = \partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\mu - g_2(W^2_\mu W^3_\nu - W^2_\nu W^3_\mu)$$

samoodziaływanie pól cechowania $\uparrow$

Człon kinetyczny

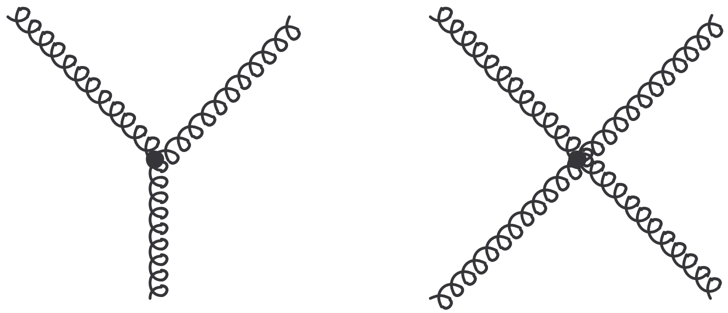
$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{8}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{W}_{\mu\nu}\boldsymbol{W}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{8}\sum_{kl} W^k_{\mu\nu}W^{l\,\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\,(\tau_k\tau_l) = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3} W^k_{\mu\nu}W^{k\,\mu\nu}$$

zawiera sprzężenia typu

$$g_2\left(\partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\mu\right)(W^{\mu\,2}W^{\nu\,3} - W^{\nu\,2}W^{\mu\,3})$$
$$g_2^2(W^2_\mu W^3_\nu - W^2_\nu W^3_\mu)(W^{\mu\,2}W^{\nu\,3} - W^{\nu\,2}W^{\mu\,3})$$

$$g_2 \left(\partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\mu\right) \left(W^{\mu\,2} W^{\nu\,3} - W^{\nu\,2} W^{\mu\,3}\right)$$

$$g_2^2 (W^2_\mu W^3_\nu - W^2_\nu W^3_\mu)(W^{\mu\,2} W^{\nu\,3} - W^{\nu\,2} W^{\mu\,3})$$



Zmiana bazy

Definiujemy

$$\boldsymbol{W}_\mu(x) = \begin{bmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{bmatrix},$$

czyli

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2 \right).$$

Taka definicja bierze się stąd, że mamy:

$$\tau^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_1 \pm i\tau_2) \ \rightarrow \ \tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tau^+ + \tau^- \right)$$
$$\rightarrow \tau_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\tau^- - \tau^+ \right)$$

i dalej

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W}_\mu &= W_\mu^1\tau_1 + W_\mu^2\tau_2 + W_\mu^3\tau_3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tau^+ + \tau^-\right) W_\mu^1 + i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tau^- - \tau^+\right) W_\mu^2 + W_\mu^3\tau_3 \\
&= \tau^+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 - iW_\mu^2\right) + \tau^-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 + iW_\mu^2\right) + W_\mu^3\tau_3 \\
&= \tau^+W_\mu^+ + \tau^-W_\mu^- + W_\mu^3\tau_3.
\end{aligned}$$

Ostatecznie mamy

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^3 W^{3\,\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^- W^{+\,\mu\nu}.$$

Model z lokalną symetrią SU(2)×U(1)

Dla pełnej teorii z symatrią SU(2)×U(1):

$$\Phi \to \Phi' = e^{-i\theta(x)\tau_0} U \Phi$$
$$U = e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}}$$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{dyn} + \mathcal{L}_{\Phi}$$

$$\mathcal{L}_{dyn} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{8} \mathrm{Tr}(\boldsymbol{W}_{\mu\nu} \boldsymbol{W}^{\mu\nu}),$$
$$\mathcal{L}_{\Phi} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi)$$

gdzie

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$
$$\boldsymbol{W}_{\mu\nu} = D_\mu \boldsymbol{W}_\nu - D_\nu \boldsymbol{W}_\mu.$$

pochodna kowariantna

$$D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g_1}{2} B^\mu + i\frac{g_2}{2} \boldsymbol{W}^\mu$$