Moment magnetyczny Diraka

Równania:

$$(i\partial_0 - q\Phi)\psi_L - \sigma^i \left(i\partial_i - qA_i\right)\psi_L - m\psi_R = 0,$$
$$(i\partial_0 - q\Phi)\psi_R + \sigma^i \left(i\partial_i - qA_i\right)\psi_R - m\psi_L = 0.$$

W spoczynku, dla cząstki swobodnej

$$\psi_L = \psi_R = ue^{-imt}$$

spodziewamy się, że wgranicy $E \to m$ (lub $m \to \infty$)

$$\psi_L \simeq \psi_R$$

Definiujemy dużą i małą dwukomponentową funkcję falową:

$$\phi = e^{imt}\left(\psi_L + \psi_R\right)$$
$$\chi = e^{imt}\left(\psi_L - \psi_R\right)$$

Dodając i odejmując równania

$$(i\partial_0 - q\Phi)\phi - \sigma^i \left(i\partial_i + qA_i\right)\chi = 0$$
$$(i\partial_0 - q\Phi + 2m)\chi - \sigma^i \left(i\partial_i + qA_i\right)\phi = 0$$

(indeksy są przyjete tak, że $A_i \to \vec{A},\ \partial_i \to \vec{\nabla}$). W granicy $m \to \infty$ z drugiego równania

$$\chi = \frac{1}{2m}\sigma^i\left(i\partial_i + qA_i\right)$$

a z pierwszego:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\sigma^i\left(i\partial_i + qA_i\right)\sigma^j\left(i\partial_j + qA_j\right) + q\Phi\right]\phi$$

Przepiszmy

$$\sigma^i\sigma^j\left(i\partial_i + qA_i\right)\left(i\partial_j + qA_j\right) = (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2$$
$$+i\varepsilon_{ijk}\sigma^k(-\partial_i\partial_j + q^2A_iA_j + iq\left(\partial_iA_j\right) + iq\left(A_i\partial_j + A_j\partial_i\right) = \dots$$

gdzie

$$\sigma^i\sigma^j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma^k.$$

$$\dots = (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 - q\vec{\sigma}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}_{=\vec{B}}$$

Stąd

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[\frac{(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2}{2m} - \frac{q}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + q\Phi\right]\phi$$

dla elektronu $q = -e$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \quad \text{magneton Bohra}$$

Kwantowa teoria pola

Dotychczas wszyskie klasyczne pola kwantowe zapisywaliśmy jako sumę modów o określonym $\vec{p}$:

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}}\left(\frac{a_{\vec{p}}}{\sqrt{2\omega_p}}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_pt)} + \frac{b^*_{\vec{p}}}{\sqrt{2\omega_p}}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_pt)}\right), \longleftarrow \text{ skalarne pole zespolone}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k},\lambda=1,2}\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k})\left[\frac{a_{\vec{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)} + \frac{a^*_{\vec{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_kt)}\right], \longleftarrow \text{ cechowanie Coul.}$$

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\left(b_{\vec{p}\varepsilon}u_\varepsilon(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_pt)} + d^*_{\vec{p}\varepsilon}v_\varepsilon(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_pt)}\right). \longleftarrow \text{ fermiony}$$

gdzie ($\hbar = c = 1$):

$$E_p = +\sqrt{\vec{p}^2+m^2},\ \omega_k = \left|\vec{k}\right|.$$

Kwantyzacja:

$$\begin{aligned}
\text{funkcje: } & \Phi,\ \vec{A},\ \psi \rightarrow \text{ operatory pola} \\
\text{stałe zespolone: } & a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}\lambda}, b_{\vec{p}\,\varepsilon} \ldots \rightarrow \text{operatory kreacji i anihilacji} \\
\text{energia: } & \int d^3x T^0_0 \ \rightarrow \ \text{hamiltonian} \\
\rightarrow \quad & \left| n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \ldots \right\rangle \quad \text{przestrzeń Focka}
\end{aligned}$$

Kwantowa teoria pola jest konystentnym uogólnieniem mechaniki kwantowej na przypadek relatywistyczny.

Rzeczywiste pole skalarne

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}}\left(\frac{a_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_p}}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_pt)} + \frac{a^{\dagger}_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_p}}e^{-ii(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_pt)}\right)$$

Relacje komutacji:

$$\left[a_{\vec{p}}, a^{\dagger}_{\vec{p}'}\right] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'},\ \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}\right] = \ \left[a^{\dagger}_{\vec{p}}, a^{\dagger}_{\vec{p}'}\right] = 0.$$

Przestrzeń stanów:

$$\underbrace{a^{\dagger}_{\vec{p}}a_{\vec{p}}}_{N_{\vec{p}}}|n\rangle = n\,|n\rangle\,, \quad a_{\vec{p}}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \quad a^{\dagger}_{\vec{p}}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n\rangle$$

Hamiltonian

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p a^*_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \to \sum_{\vec{p}} E_p a^{\dagger}_{\vec{p}} a_{\vec{p}} = \sum_{\vec{p}} E_p N_{\vec{p}}$$

Niejednoznaczność:

$$a^*_{\vec{p}}a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}a^*_{\vec{p}} \to a^{\dagger}_{\vec{p}}a_{\vec{p}} \neq a_{\vec{p}}a^{\dagger}_{\vec{p}}.$$

Spodziewalibyśmy się

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p \left(N_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right)$$

ale to daje nieskończoną energię (zero point energy). Uporządkowanie normalne: operatory anihilacji na prawo

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p \colon\! \left(N_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right) \colon = \sum_{\vec{p}} E_p N_{\vec{p}}$$

Stan $|0\rangle$ – próżnia, $|1\rangle$ – jedna cząstka o pędzie $\vec{p}$, itd. Podobnie dla zespolonego pola skalarnego.

Fotony

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\lambda=1,2} \vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) \left[\frac{a_{\vec{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \frac{a^\dagger_{\vec{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right]$$

Komutacja:

$$\left[a_{\vec{k}\,\lambda}, a^\dagger_{\vec{k}\,'\lambda'}\right] = \delta_{\vec{k}\,\vec{k}'}\delta_{\lambda\,\lambda'},\ \left[a_{\vec{k}\,\lambda}, a_{\vec{k}\,'\lambda'}\right] = \ \left[a^\dagger_{\vec{k}\,\lambda}, a^\dagger_{\vec{k}\,'\lambda'}\right] = 0.$$

Energia

$$H = \sum_{\vec{k},\lambda=1,2} a^\dagger_{\vec{k}\,\lambda} a_{\vec{k}\,\lambda} \omega_k = \sum_{\vec{k},\lambda=1,2} N_{\vec{k}\lambda}\omega_k.$$

Pola fermionowe

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(b_{\vec{p}\,\varepsilon} u_\varepsilon(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_p t)} + d^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} v_\varepsilon(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-E_p t)} \right)$$

Operatory

$b_{\vec{p}\,\varepsilon}$: anihiluje elektron o pędzie $\vec{p}$ i helicity ε

$b^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon}$: kreuje elektron o pędzie $\vec{p}$ i helicity ε

$d_{\vec{p}\,\varepsilon}$: anihiluje pozytron o pędzie $\vec{p}$ i helicity ε

$d^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon}$: kreuje pozytron o pędzie $\vec{p}$ i helicity ε

Relacje antykomutacji:

$$\left\{ b_{\vec{p}\,\varepsilon}, b^\dagger_{\vec{p}'\,\varepsilon'} \right\} = \left\{ d_{\vec{p}\,\varepsilon}, d^\dagger_{\vec{p}'\,\varepsilon'} \right\} = \delta_{\vec{p}\,\vec{p}'} \delta_{\varepsilon\,\varepsilon'}$$

pozostałe zero, także mieszane

$$\left\{ b_{\vec{p}\,\varepsilon}, d^\dagger_{\vec{p}'\,\varepsilon'} \right\} = \left\{ d_{\vec{p}\,\varepsilon}, b^\dagger_{\vec{p}'\,\varepsilon'} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}\,\varepsilon}, d_{\vec{p}'\,\varepsilon'} \right\} = \left\{ b^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon}, d^\dagger_{\vec{p}'\,\varepsilon'} \right\} = 0.$$

Operatory liczby cząstek

$$N^{e^-}_{\vec{p}\varepsilon} = b^\dagger_{\vec{p}\varepsilon} b_{\vec{p}\varepsilon}, \quad N^{e^+}_{\vec{p}\varepsilon} = d^\dagger_{\vec{p}\varepsilon} d_{\vec{p}\varepsilon}$$

mają dwie wartości własne: 0 i 1 (zakaz Pauliego). Bowiem z reguł antykomutacji wynika, że

$$\begin{aligned} b_{\vec{p}\varepsilon} b_{\vec{p}\varepsilon} &= 0 = b^\dagger_{\vec{p}\varepsilon} b^\dagger_{\vec{p}\varepsilon} \\ d_{\vec{p}\varepsilon} d_{\vec{p}\varepsilon} &= 0 = d^\dagger_{\vec{p}\varepsilon} d^\dagger_{\vec{p}\varepsilon}. \end{aligned}$$

Oznaczając $\vec{p}\varepsilon = i$ mamy

$$N_i^2 = N_i N_i = b_i^\dagger b_i b_i^\dagger b_i = b_i^\dagger \left(1 - b_i^\dagger b_i\right) b_i = N_i$$

$$N_i(N_i - 1) = 0 \rightarrow N_i = 0 \quad \text{lub} \quad N_i = 1.$$

Podobnie dla d_i.

Energia:

$$H = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \left(b^*_{\vec{p}\,\varepsilon} b_{\vec{p}\,\varepsilon} - d_{\vec{p}\,\varepsilon} d^*_{\vec{p}\,\varepsilon}\right) E_p$$

$$\Downarrow$$

$$H = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \left(b^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} b_{\vec{p}\,\varepsilon} - d_{\vec{p}\,\varepsilon} d^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon}\right) E_p \qquad \longleftarrow \text{antykomutacja}$$

$$= \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \left(b^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} b_{\vec{p}\,\varepsilon} + d^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} d_{\vec{p}\,\varepsilon} - 1\right) E_p \longleftarrow \text{odrzucenie drgań zerowych}$$

$$= \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \left(b^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} b_{\vec{p}\,\varepsilon} + d^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} d_{\vec{p}\,\varepsilon}\right) E_p \qquad \longleftarrow \text{dodatnie!}$$

Pęd

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \left(b^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} b_{\vec{p}\,\varepsilon} + d^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} d_{\vec{p}\,\varepsilon}\right) \vec{p}$$

Operator liczby cząstek

$$\int d^3\vec{r}\, P(\vec{r},t) = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \left(b^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} b_{\vec{p}\,\varepsilon} + d_{\vec{p}\,\varepsilon} d^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} \right)$$
$$\to \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \left(b^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} b_{\vec{p}\,\varepsilon} - d^\dagger_{\vec{p}\,\varepsilon} d_{\vec{p}\,\varepsilon} \right).$$

Zachowana jest liczba elektronów minus liczba pozytronów. Mogą powstawać pary e^+e^-.