Rozwiązania równania Diraka dla cząstki w spoczynku

Równania

$$i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L = 0$$

mają rozwiazania w postaci fal płaskich

$$\psi_{L,R}(x) = u_{L,R} e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})} = u_{L,R} e^{-ipx}$$

gdzie

$$u_{L,R}$$

są dwukomponentowymi spinorami. Spełniony jest związek

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

(bo funkcje falowe r. Diraka spełniają też r. Kleina-Gordona). Aby znaleźć $u_{L,R}$ rozwiążmy r. Diraka w układzie $S'$, gdzie cząstka spoczywa $\vec{p} = 0$ ($\sigma^0 = \tilde{\sigma}^0 = 1$):

$$i\partial_t' \psi_L' = m\psi_R', \quad i\partial_t' \psi_R' = m\psi_L'.$$

## Rozwiązania o dodatniej energii

Ponieważ $E' = \pm m$, rozpatrzmy najpierw rozwiązania o dodatniej energii $E' = m$:

$$\psi'_L = ue^{-imt'}, \quad \psi'_R = ue^{-imt'},$$

czyli $u_L = u_R = u \rightarrow$ rozwiazania lewoskretne i prawoskretne są identyczne (dodatnia parzystość), gdzie

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Spin

Podobnie jak dla fotonu zbadamy, jak wygląda generator spinu. Transformacja obrotu:

$$M\psi_L(x) = \psi'_L(x'), \quad N\psi_R(x) = \psi'_R(x')$$

Pamietajmy

$$U\,\psi_L(x) = M\,\psi_L(L^{-1}x)$$

czyli $U = M$ oraz (patrz spin fotonu)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

czyli

$$M = N = \begin{bmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\phi/2} \end{bmatrix} = 1 - i\phi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \ldots = 1 - i\frac{\phi}{2}\sigma^3 + \ldots$$

$$S_z = i\hbar \lim_{\phi\to 0} \left(U\left(\phi\right) - 1\right)/\phi = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd mamy dla spinorów Weyla:

$$S_z \psi_{L,R} = \frac{\hbar}{2} \sigma^3 \psi_{L,R}.$$

Stany własne

$$+\frac{\hbar}{2} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -\frac{\hbar}{2} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla bispinorów Diraka

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} \to \Sigma_z = \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix}$$

$$\to \Sigma_{x,y} = \begin{bmatrix} \sigma^{1,2} & 0 \\ 0 & \sigma^{1,2} \end{bmatrix}.$$

Zatem operator Casimira:

$$S^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 + \Sigma_z^2) = \frac{3}{4} \hbar^2 \times \mathbf{1} = s(s+1) \hbar^2 \times \mathbf{1} \to s = \frac{1}{2}.$$

bo

$$(\sigma^i)^2 = 1.$$

Fale płaskie

Przejdźmy do układu $S$, w którym układ $S'$ (zatem i cząstka) porusza się z predkością:

$$\vec{v} = (0, 0, v), \quad v > 0, \quad \tanh\theta = \frac{v}{c}.$$

Ponieważ w rozwiązaniach jest czynnik

$$e^{-imt'}$$

zbadajmy transformację Lorentza:

$$\begin{aligned}
t^{'}c &= tc\cosh\theta - z\sinh\theta \quad \longleftarrow \frac{v}{c} = \tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} \\
&= \cosh\theta\left[tc - z\frac{v}{c})\right] \quad \longleftarrow \frac{1}{\cosh^2\theta} = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \longleftarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{\cosh^2\theta - 1}{\cosh^2\theta} \\
&= \gamma\left[tc - z\frac{v}{c}\right] \quad \longleftarrow \gamma = \cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.
\end{aligned}$$

Mamy ($c = 1$)

$$p' = (m, 0, 0, 0) = L \cdot p$$
$$p = L^{-1} p' = (m \cosh\theta, 0, 0, m \sinh\theta)$$

$$E = m \cosh\theta = m\gamma, \quad p = m \sinh\theta = m\gamma v$$

i ostatecznie

$$mt' = m\gamma\,[t - zv] = Et - pz$$

Mamy

$$\psi_L(x) = M^{-1}\psi'_L(x') = e^{-imt'} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{+\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$
$$\psi_R(x) = N^{-1}\psi'_R(x') = e^{-imt'} \begin{bmatrix} e^{+\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Wybierzmy stan o $S_x = +\hbar/2$, czyli $u_1 = 1, u_2 = 0$. Teraz ($c = 1$):

$$\psi_L(x) = e^{-i(Et-pz)} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix}, \; \psi_R(x) = e^{-i(Et-pz)} \begin{bmatrix} e^{+\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Skrętność (helicity)

$$\text{helicity} = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

nasz stan ma $\vec{p} = (0, 0, p)$, więc helicity $= \Sigma_z$, czyli dla przypadku $u_1 = 1, u_2 = 0$ helicity $= +1$. Wprowadźmy bispinor o dodatniej energii i dodatnim helicity:

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et-pz)} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Analogicznie dla $u_1 = 0, u_2 = 1$ mamy bispinor o ujemnej skrętności:

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et-pz)} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \\ e^{-\theta/2} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie dla dowolnego $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ otrzymujemy poprzez obrót. **Obrót zachowuje helicity**. Zatem dla jesli obrót przekształca

$$\vec{p}' = (0,0,p) \to \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$$

$$u_+(\vec{p}') = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix} \to u_+(\vec{p}) : \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} u_+(\vec{p}) = u_+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \, |+\rangle \\ e^{+\theta/2} \, |+\rangle \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle, \quad \text{gdzie} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to |+\rangle \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to |-\rangle$$

Podsumowując

$$\psi_+ = e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})} u_+(\vec{p}) = e^{-ip^\mu x_\mu} u_+(\vec{p}), \quad \psi_- = e^{-ip^\mu x_\mu} u_-(\vec{p}),$$

gdzie

$$u_+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} \, |+\rangle \\ e^{+\theta/2} \, |+\rangle \end{bmatrix}, \quad u_-(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{+\theta/2} \, |-\rangle \\ e^{-\theta/2} \, |-\rangle \end{bmatrix}.$$

## Rozwiązania o ujemnej energii

$$i\partial_t'\psi_L' = m\psi_R', \quad i\partial_t'\psi_R' = m\psi_L'.$$

Rozwiązania dla $E' = -m$:

$$\psi_L' = ve^{imt'}, \quad \psi_R' = -ve^{imt'}$$

czyli $v_L = -v_R = v \rightarrow$ rozwiazania lewoskrętne i prawoskretne różnią się znakiem (ujemna parzystość).

Boost:

$$p = L^{-1}p' = (-m\cosh\theta, 0, 0, -m\sinh\theta)$$

$$E = -m\cosh\theta = -m\gamma, \quad p = m\sinh\theta = -m\gamma v$$

(pęd ma znak minus w stosunku do rozw. z $E > 0$) i ostatecznie

$$mt' = m\gamma\,[t - zv] = -(Et - pz)$$

Rozwiązania o dodatniej i ujemnej helicity (przeciwnie niż dla rozw. z $E > 0$):

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et-pz)} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \\ -e^{-\theta/2} \end{bmatrix}, \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et-pz)} \begin{bmatrix} -e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{+\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Po dokonaniu obrotu

$$\psi_+ = e^{-ip^\mu x_\mu} v_+(\vec{p}), \quad \psi_- = e^{-ip^\mu x_\mu} v_-(\vec{p}), \quad p = (-m\gamma, -m\gamma\vec{v})$$

lub

$$\psi_+ = e^{ip^\mu x_\mu} v_+(\vec{p}), \quad \psi_- = e^{ip^\mu x_\mu} v_-(\vec{p}), \quad p = (m\gamma, m\gamma\vec{v})$$

gdzie

$$v_+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{+\theta/2} \, |-\rangle \\ -e^{-\theta/2} \, |-\rangle \end{bmatrix}, \quad v_-(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -e^{-\theta/2} \, |+\rangle \\ e^{+\theta/2} \, |+\rangle \end{bmatrix}.$$

Łatwo wykazać, że dla rozwiązań z ujemną energią:

$$\overline{\psi}\psi = \psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L = -1.$$

Interpretacja $\rightarrow$ morze Diraka.

## Tensor energii i pędu

Zapiszmy

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &= i\psi_a^*\partial_0\psi_a + \underbrace{\psi_c^*\gamma^0_{cb}}_{\overline{\psi}_b}\left(i\gamma^k_{ba}\partial_k - m\delta_{ba}\right)\psi_a.\end{aligned}$$

Traktując $\psi_a^*$ i $\psi_a$ jako niezależne mamy

$$\begin{aligned}T^\mu_\nu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)}\partial_\nu\psi_a - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu \\ T^0_0 &= i\psi_a^*\partial_0\psi_a - \mathcal{L} = \overline{\psi}\left(-i\gamma^k\partial_k + m\right)\psi\end{aligned}$$

Rzeczywiście dla $p = 0 \rightarrow H = T^0_0 = m\overline{\psi}\psi = \pm m$. Z kolei $p_k = T^0_k$

$$T^0_k = i\psi_a^*\partial_k\psi_a = i\overline{\psi}\gamma^0\partial_k\psi.$$

## Rozkład na fale płaskie

Rozwiązanie ogólne ($E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( b_{\vec{p}\,\varepsilon} u_\varepsilon(\vec{p}) e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}\,\varepsilon} v_\varepsilon(\vec{p}) e^{i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right)$$

($u$ oraz $v$ są bispinorami 4 wym.). Zmiana normalizacji

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \to \sqrt{\frac{m}{E}}$$

stanowi problem dla cząstek bezmasowych (w wielkościach fizycznych masa się upraszcza i można przejść do granicy $m = 0$).

Własności ortogonalności ($\varepsilon = \pm$):

$$u^\dagger_\varepsilon(\vec{p})u_\varepsilon(\vec{p}) = v^\dagger_\varepsilon(\vec{p})v_\varepsilon(\vec{p}) = \frac{E_p}{m},$$
$$u^\dagger_\varepsilon(\vec{p})u_{-\varepsilon}(\vec{p}) = v^\dagger_\varepsilon(\vec{p})v_{-\varepsilon}(\vec{p}) = 0,$$
$$u^\dagger_\varepsilon(\vec{p})v_{\varepsilon'}(-\vec{p}) = v^\dagger_\varepsilon(-\vec{p})u_{\varepsilon'}(\vec{p}) = 0.$$

Na przykład:

$$u^\dagger_+(\vec{p})u_+(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left[e^{-\theta/2}\langle +| \quad e^{+\theta/2}\langle +|\right]\begin{bmatrix} e^{-\theta/2}\,|+\rangle \\ e^{+\theta/2}\,|+\rangle \end{bmatrix} = \frac{e^{-\theta}+e^{\theta}}{2}$$
$$= \cosh\theta = \frac{E}{m}.$$

Mamy:

$$H = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm}\left(b^*_{\vec{p}\varepsilon}b_{\vec{p}\varepsilon} - d_{\vec{p}\varepsilon}d^*_{\vec{p}\varepsilon}\right)E_p, \quad \vec{P} = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm}\left(b^*_{\vec{p}\varepsilon}b_{\vec{p}\varepsilon} - d_{\vec{p}\varepsilon}d^*_{\vec{p}\varepsilon}\right)\vec{p}.$$

oraz

$$\int d^3x\,\psi^\dagger\psi = \sum_{\vec{p},\varepsilon=\pm}\left(b^*_{\vec{p}\varepsilon}b_{\vec{p}\varepsilon} + d_{\vec{p}\varepsilon}d^*_{\vec{p}\varepsilon}\right)$$

Rozkład w bazie helicity:

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \left[ \left( b_{\vec{p}+} e^{-\theta/2} \left|+\right\rangle + b_{\vec{p}-} e^{+\theta/2} \left|-\right\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} + \left( d^*_{\vec{p}+} e^{+\theta/2} \left|-\right\rangle - d^*_{\vec{p}-} e^{-\theta/2} \left|+\right\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]$$

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{2E_p}} \left[ \left( b_{\vec{p}+} e^{+\theta/2} \left|+\right\rangle + b_{\vec{p}-} e^{-\theta/2} \left|-\right\rangle \right) e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} - \left( d^*_{\vec{p}+} e^{-\theta/2} \left|-\right\rangle - d^*_{\vec{p}-} e^{+\theta/2} \left|+\right\rangle \right) e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]$$

Dla każdego $\vec{p}$ są **cztery** niezależne współczynniki **zespolone** (*spinory Diraka*):

$$\underbrace{b_{\vec{p}+}, b_{\vec{p}-}}_{\text{cząstki}}, \underbrace{d^*_{\vec{p}+}, d^*_{\vec{p}-}}_{\text{antycząstki}}$$

Można narzucić warunek:

$$d_{\vec{p}+} = b_{\vec{p}+}, \quad d_{\vec{p}-} = b_{\vec{p}-}$$

są to wtedy *spinory Majorany*: cząstki i antycząstki są identyczne.

## Granica relatywistyczna

Pamiętajmy

$$\frac{m}{E} = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{2}{e^{\theta}+e^{-\theta}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{E}}e^{\theta/2} = \sqrt{\frac{2e^{\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}} = \sqrt{\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}+e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}} = \sqrt{1+\tanh\theta} = \sqrt{1+\frac{v}{c}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{E}}e^{-\theta/2} = \sqrt{\frac{2e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}} = \sqrt{\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}-e^{\theta}+e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}} = \sqrt{1-\tanh\theta} = \sqrt{1-\frac{v}{c}}$$

W granicy $v/c \to 1$

$$\sqrt{\frac{m}{E}}e^{\theta/2} \to \sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{m}{E}}e^{-\theta/2} \to 0$$

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}} \left[b_{\vec{p}-}\left|-\right\rangle e^{-i(E_p t-\vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}+}\, e^{+\theta/2}\left|-\right\rangle e^{+i(E_p t-\vec{p}\cdot\vec{r})}\right]$$

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}} \left[b_{\vec{p}+}\left|+\right\rangle e^{-i(E_p t-\vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}-}\, e^{+\theta/2}\left|+\right\rangle e^{+i(E_p t-\vec{p}\cdot\vec{r})}\right]$$

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left[ b_{\vec{p}-} \left| - \right\rangle e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}+} \, e^{+\theta/2} \left| - \right\rangle e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]$$

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left[ b_{\vec{p}+} \left| + \right\rangle e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} + d^*_{\vec{p}-} \, e^{+\theta/2} \left| + \right\rangle e^{+i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{r})} \right]$$

W granicy $v/c \to 1$ czyli $m/E \to 0$ spinory $\psi_L$ i $\psi_R$ są niezależne i zawierają tylko stany o jednej skrętności (helicity). Jak się okaże w modelu standardowym bezmasowe neutrina są lewoskrętne.

## Oddziaływanie – elektrodynamika
## Prawa zachowania $\leftrightarrow$ symetrie gęstości Lagrange'a

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi$$

jest niezmienniczy względem globalnej transformacji U(1):

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x)$$

Dokonajmy wariacji

$$\alpha \rightarrow \alpha'(x) = \alpha + \delta\alpha(x)$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left(e^{-i\alpha'(x)}\psi(x)\right) &= e^{-i\alpha'(x)}\partial_\mu\psi(x) + \psi(x)\partial_\mu e^{-i\alpha'(x)}\\ &= e^{-i\alpha'(x)}\partial_\mu\psi(x) - ie^{-i\alpha'(x)}\psi(x)\partial_\mu\left(\delta\alpha(x)\right)\end{aligned}$$

$$\delta S = S' - S = \int d^4x\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,\partial_\mu\left(\delta\alpha(x)\right) = -\int d^4x\,\partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\,\delta\alpha(x).$$

Stąd równanie ciągłości

$$\partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\psi}\gamma^0\psi\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\overline{\psi}\vec{\gamma}\psi\right) = 0.$$

Gęstość prawdopodobieństwa:

$$P = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{a=1}^{4} |\psi_a|^2$$

W mechanice klasycznej oddziaływanie z polem elektromegnetycznym wprowadzamy

$$E \rightarrow E - q\Phi, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A},$$

(dla elektronu $q = -e$) w mechanice kwantowej

$$i\partial^\mu \rightarrow iD^\mu = i\partial^\mu - qA^\mu = i\left(\partial^\mu + iqA^\mu\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \overline{\psi}\left(\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - qA_\mu\right) - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\ &= \overline{\psi}\left(\gamma^\mu i\partial_\mu - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (J^\mu + q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu\end{aligned}$$

Symetria wzgledem transformacji cechowania

$$\begin{aligned}A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x) \\ \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\chi(x)}\psi(x)\end{aligned}$$

# Sprzężenie ładunkowe

Zamiana cząstki ($E > 0$) na antycząstkę ($E < 0$), także $q \to -q$:

$$e^{-iEt} \to e^{+iEt} = \left(e^{-iEt}\right)^* .$$

$$\begin{aligned} \left(\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - qA_\mu\right) - m\right)\psi = 0 \quad &\longleftarrow \quad \text{sprzężenie zepolone} \\ \left(\gamma^{*\,\mu} \left(-i\partial_\mu - qA_\mu\right) - m\right)\psi^* = 0 \end{aligned}$$

Pamiętajmy

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\gamma^{0,1,3})^* = \gamma^{0,1,3}, (\gamma^2)^* = -\gamma^2, \text{ a także } (\gamma^2)^T = \gamma^2, \text{ bo } \left(\sigma^i\right)^T = -\sigma^i.$$

Mamy

$$\gamma^2(\gamma^{0,1,3})^* = -\gamma^{0,1,3}\gamma^2, \ \gamma^2(\gamma^2)^* = -\gamma^2\gamma^2$$

i dalej

$$\begin{aligned} \left((\gamma^\mu)^* \left(-i\partial_\mu - qA_\mu\right) - m\right)\psi^* = 0 \quad &\longleftarrow \gamma^2 \times \\ \left(\gamma^\mu \left(i\partial_\mu + qA_\mu\right) - m\right)\gamma^2\psi^* = 0 \quad &\longleftarrow A^c = -A, \psi^c = -i\gamma^2\psi^* \\ \left(\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - qA^c_\mu\right) - m\right)\psi^c = 0 \end{aligned}$$

Wprowadziliśmy ($i-$ konwencja)

$$\psi^c = \underbrace{-i\gamma^2}_{\text{rzeczywiste}} \psi^*$$

lub

$$\psi_L^c = -i\sigma^2\psi_R^*, \quad \psi_R^c = +i\sigma^2\psi_L^*$$

Relacje odwrotne :

$$\begin{aligned}
\psi^* &= -i\gamma^2\psi^c && \longleftarrow \quad \left(\gamma^2\right)^2 = -1 \\
\psi &= -i\gamma^2\left(\psi^c\right)^* && \longleftarrow \quad -i\gamma^2 \in \mathfrak{R} \\
\psi^\dagger &= -i\left(\psi^c\right)^T\gamma^2 && \longleftarrow \quad \left(\gamma^2\right)^T = \gamma^2
\end{aligned}$$

pozwalają wykazać, że gęstość Lagrange'a jest niezmiennicza, np:

$$\overline{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = -\left(\psi^c\right)^T\gamma^2\gamma^0\gamma^2\left(\psi^c\right)^* = -\left(\psi^c\right)^T\gamma^0\left(\psi^c\right)^*$$

Rozpiszmy:

$$-\underbrace{\left(\psi^c\right)_a\gamma^0_{ab}\left(\psi^c\right)^*_b}_{\text{przestawmy pola } \psi} = +\left(\psi^c\right)^*_b\gamma^{0T}_{ba}\left(\psi^c\right)_a = \left(\psi^c\right)^\dagger\gamma^0\psi^c = \overline{\psi^c}\psi^c.$$

Pola $\psi$ antykomutują (!!!!).

## Oddziaływujące pole skalarne

Równanie Kleina-Gordona:

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi = 0$$

Zasada minimalnego sprzężenia:

$$\left[(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2\right] \Phi = 0.$$

Rozwiązania są zespolone, dlatego

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1 + i\phi_2\right).$$

Gęstość Lagrange'a

$$\mathcal{L} = -(i\partial_\mu + qA_\mu)\Phi^*(i\partial^\mu - qA^\mu)\Phi - m^2\Phi^*\Phi = 0.$$

Od razu widać, że $\Phi^*$ sprzęga się z ładunkiem $-q$:

$$\Phi \rightarrow \Phi^c = \Phi^*$$
$$A \rightarrow A^c = -A.$$

Gęstość lagrange'a jest niezmiennicza po pola $\Phi$ komutują.