Spinory Weyla

Równanie Diraka:

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta m)\psi = 0.$$

Rozpiszmy ψ przy użyciu dwukomponentowych spinorów Weyla:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}, \; \alpha_i = \begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Równanie Diraka jest równoważne dwóm równaniom:

$$\left(i\partial_t - i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_L - m\psi_R = 0,$$
$$\left(i\partial_t + i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_R - m\psi_L = 0.$$

Wprowadzając „czterowektory”

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$$

pamietając, że

$$\partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla}), \quad \partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla})$$

mamy

$$i\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_R = 0, \quad i\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\psi_L = 0.$$

Widzimy, że w przypadku $m = 0$ równania na ψ_L i ψ_R są niezależne.

$$\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$$

Grupa SL(2,C)

Grupa zespolonych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1. 4 parametry zespolone $\rightarrow$ 8 rzeczywistych, det $= 1 \rightarrow$ dwa równania rzeczywiste, stąd jest to grupa 6-cio parametrowa, tak jak grupa Lorentza.

Z każdym czterowektorem x kojarzymy macierz hermitowską:

$$X(x) = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}$$

$$\det X = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^\mu x_\mu.$$

Weźmy

$$M \in \mathrm{SL(2,C)}$$

$$M^\dagger X' M = X \qquad \text{lub} \qquad X' = (M^{-1})^\dagger X M^{-1}.(*)$$

Ponieważ X' jest też hermitowska, istnieje czterowektor x' taki, że

$$X'(x') = \begin{bmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{bmatrix}$$

Transformacja (*) zachowuje wyznacznik, więc

$$x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu.$$

Zatem M odpowiada pewnej (właściwej) transformacji Lorentza $L^{\mu}{}_{\nu}$. Dla $M = 1$ zachodzi $L = 1$. Jednakże macierze M oraz $-M$ odpowiadają tej samej transformacji Lorentza.

Jak wyliczyć L dla danego M?

Zauważmy

$$\begin{aligned} X(x) &= x_\mu \tilde{\sigma}^\mu = x^0\sigma^0 + x^1\sigma^1 + x^2\sigma^2 + x^3\sigma^3 \\ &= \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Analogicznie

$$X'(x') = x'_\mu \tilde{\sigma}^\mu$$

Pamiętajmy

$$
\begin{aligned}
x'^{\mu} &= L^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}, \\
x'_{\rho} &= g_{\rho\mu} L^{\mu}{}_{\nu} g^{\nu\tau}\, x_{\tau} = L_{\rho}{}^{\tau} x_{\tau}
\end{aligned}
$$

stąd

$$
x'^{\mu} x'_{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\, L_{\mu}{}^{\tau} x^{\nu} x_{\tau} = x^{\nu} x_{\nu} \longrightarrow L^{\mu}{}_{\nu}\, L_{\mu}{}^{\tau} = \delta^{\tau}_{\nu}
$$

i

$$
L^{\tau}{}_{\nu}\, L_{\mu}{}^{\nu} = \delta^{\tau}_{\mu}.
$$

Są to macierze wzajemnie odwrotne.

Teraz

$$X'(x') = x'_\mu \tilde{\sigma}^\mu = \tilde{\sigma}^\mu L_\mu^{\ \ \nu} x_\nu$$
$$X = M^\dagger X' M = M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M \, L_\mu^{\ \ \nu} x_\nu = \tilde{\sigma}^\nu x_\nu$$

Mamy wiec równość

$$M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M \, L_\mu^{\ \ \nu} = \tilde{\sigma}^\nu \qquad \times L^\tau_{\ \ \nu}$$
$$M^\dagger \tilde{\sigma}^\tau M = L^\tau_{\ \ \nu} \tilde{\sigma}^\nu$$

Dla macierzy σ zachodzi

$$\mathrm{Tr}\, \tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\nu = 2\delta^{\mu\nu}$$

zatem

$$L^\tau_{\ \ \mu} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\tilde{\sigma}^\mu M^\dagger \tilde{\sigma}^\tau M \right) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\sigma_\mu M^\dagger \tilde{\sigma}^\tau M \right).$$

Analogicznie można zdefiniować macierze

$$Y(x) = x_\mu \sigma^\mu,$$

które transformują się

$$N^\dagger Y' N = Y \to N^\dagger \sigma^\tau N = L^\tau_{\ \ \nu} \sigma^\nu.$$

Macierze M i N są powiązane

$$NM^{\dagger} = 1.$$

Transformacja równania Diraka

Zapiszmy gęstość Lagrange'a dla cząstek Diraka w układzie S:

$$\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger(x)\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L(x) + i\psi_R^\dagger(x)\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R(x) - m(\psi_L^\dagger(x)\psi_R(x) + \psi_R^\dagger(x)\psi_L(x))$$

Zachodzi

$$\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu = M^\dagger\tilde{\sigma}^\nu M\, L_\nu^{\ \ \mu}\partial_\mu = M^\dagger\tilde{\sigma}^\tau M\,\partial'_\tau$$

gdzie użyto:

$$\tilde{\sigma}^\mu = M^\dagger\tilde{\sigma}^\nu M\, L_\nu^{\ \ \mu}, \quad L_\nu^{\ \ \mu}\partial_\mu = \partial'_\nu$$

Analogicznie

$$\sigma^\mu\partial_\mu = N^\dagger\sigma^\tau N\partial'_\tau.$$

Aby człon kinetyczny był niezmienniczy

$$M\psi_L(x) = \psi'_L(x'), \quad N\psi_R(x) = \psi'_R(x')$$

Człon masowy

$$\psi_L^\dagger(x)\psi_R(x)+\psi_R^\dagger(x)\psi_L(x) = \psi_L'^\dagger(x')(M^\dagger)^{-1}N^{-1}\psi'_R(x')+\psi_R'^\dagger(x')(N^\dagger)^{-1}M^{-1}\psi'_L(x')$$

jest niezmienniczy, jeśli

$$(M^\dagger)^{-1}N^{-1} = (N^\dagger)^{-1}M^{-1} = 1 \rightarrow M^\dagger N = N^\dagger M = 1.$$

Przykłady transformacji

Obrót

$$L^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

to M i N są unitarne:

$$M = N = \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić ze wzoru

$$L^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\tilde{\sigma}^\nu M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M\right).$$

Przykłady transformacji

Boost ($v/c = \tanh\theta$):

$$L^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

to M i N nie są unitarne

$$M = \begin{bmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} e^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{\theta/2} \end{bmatrix}.$$

Parzystość

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = -\vec{r}, \quad \vec{\nabla} \to \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$$

Mamy

$$\tilde{\sigma}^\mu \partial'_\mu = \sigma^\mu \partial_\mu, \quad \sigma^\mu \partial'_\mu = \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu.$$

Gęstość Lagrange'a pozozstaje niezmiennicza gdy

$$\psi_L(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \psi_L^{\mathcal{P}}(x') = \psi_R(x),$$
$$\psi_R(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \psi_R^{\mathcal{P}}(x') = \psi_L(x)$$

z dokładnością do fazy $e^{i\alpha}$, którą wybieramy $\alpha = 0$.

Macierze gamma, formy współzmiennicze

Wprowadza się
$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i.$$
Wtedy
$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}$$
$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}, \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}$$
w innych przypedkach zero.
$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \psi^\dagger(i\partial_t + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta m)\psi \\ &= \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \gamma^0\beta m) \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\end{aligned}$$
gdzie
$$\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$
a równanie Diraka ma postać
$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0.$$

W reprezentacji chiralnej

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}$$

Wprowadza się

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_L \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_R \end{bmatrix}$$

są *operatorami rzutowymi.*

Formy biliniowe

$$
\begin{aligned}
\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L &= \overline{\psi}\psi \quad \text{(skalar)} \\
i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) &= i\overline{\psi}\gamma^5\psi \quad \text{(pseudoskalar)} \\
\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R &= \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \text{(wektor)} \\
\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L - \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R &= \overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \quad \text{(pseudowektor)}
\end{aligned}
$$